ANALYSE SPECTRALE : TRANSFORMATION DE LAPLACE

Ce module sera étudié en liaison étroite avec les enseignements des autres disciplines.

Le programme se borne à la transformation de Laplace des fonctions nulles sur]-∞, 0[(fonctions causales). Dans le cas d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, on transforme donc la fonction $t \mapsto \mathcal{U}(t) f(t)$, où $\mathcal{U}$ désigne l'échelon unité.

On s'intéressera essentiellement aux combinaisons linéaires à coefficients réels ou complexes de fonctions de la forme $t \mapsto \mathcal{U}(t-\alpha) t^n e^{rt}$, où α est un réel positif, n un entier positif et r un nombre complexe.

a) Transformation de Laplace :

On donnera quelques notions sur les intégrales impropres, en particulier sur la convergence d'une intégrale de la forme

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition de la transformation de Laplace :

$$(\mathcal{L}f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,\mathrm{d}t\text{, où } p \in \mathbb{R}.$$

Linéarité.
Transformée de Laplace d'une dérivée et d'une primitive.
Effet d'une translation ou d'un changement d'échelle sur la variable.
Effet de la multiplication par e^{-at}
Transformée de Laplace des fonctions constantes et des fonctions exponentielles $t \mapsto e^{at}$, où $a \in \mathbb{C}$.
Dérivée d'une transformée de Laplace (admis).
Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale (admis).

L'étude de la convergence des intégrales impropres données *a priori* n'est pas un objectif de la formation.

En relation avec l'enseignement de l'électronique et de la régulation, on indiquera
que les propriétés de la transformation de Laplace s'étendent au cas où p est complexe ;
comment l'impulsion unité δ peut être considérée comme obtenue par passage à la limite de fonctions (f_n), et qu'en étudiant la limite de $(\mathcal{L}f_n)$ on est amené à dire que $(\mathcal{L}\delta) = 1$.
Toutefois, aucune connaissance sur ces points n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

b) Calcul opérationnel :

Approche des notions de fonctions de transfert et de calcul opérationnel.

Les seules connaissances exigibles sur le calcul opérationnel portent sur le cas des fonctions rationnelles, combinées avec un facteur de retard éventuel.
Sur ces exemples, on pourra mettre en évidence l'importance de la notion de stabilité, mais les critères généraux de stabilité sont hors programme.

Travaux pratiques

Recherche de la transformée de Laplace d'une fonction donnée ou recherche d'une fonction dont la transformée de Laplace est donnée.	On se limitera au cas où les fonctions données ou recherchées sont des combinaisons linéaires à coefficients réels ou complexes de fonctions de la forme $t \mapsto \mathcal{U}(t-\alpha)\, t^n\, e^{rt}$, où α est un nombre réel positif, n un nombre entier positif et r un nombre complexe. On habituera les étudiants à utiliser des transformations géométriques simples (translation, symétrie orthogonale) et des propriétés figurant dans le formulaire pour obtenir sans calcul la transformée d'une fonction donnée ou rechercher une fonction dont la transformée de Laplace est donnée.
2° Résolution à l'aide de la transformation de Laplace des équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.	On se limitera pour le second membre aux fonctions du TP 1. On insistera sur des exemples où la transformée de Laplace présente un intérêt, par exemple lorsque le second membre est $t \mapsto (t+1)\mathcal{U}(t) - t\,\mathcal{U}(t-1)$; en revanche il est parfois peu judicieux de l'utiliser lorsque le second membre est, par exemple, la fonction $t \mapsto (t+1)\,\mathcal{U}(t)$
3° Exemples d'emploi de la transformation de Laplace pour la résolution de systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants	On se limitera pour le second membre aux fonctions exponentielles-polynômes $t \mapsto e^{at} P(t)$ où $a \in \mathbb{C}$
4° Exemples d'emploi de la transformation de Laplace pour la résolution d'équations différentielles du type $ay'(t) + by(t) + c\int_0^t y(u)\,\mathrm{d}u = f(t)$ où a, b et c sont des constantes réelles.	On se limitera pour le second membre aux fonctions du TP1 Dans le cas où $a = 0$, on fera remarquer que $t \mapsto y(t)$ peut présenter des discontinuités.