

1° Calcul de probabilités portant sur l'union et sur l'intersection de deux événements.

2° Etude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi binomiale.

3° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi de Poisson.

4° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi normale.

5° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi binomiale que l'on approche par une loi de Poisson ou une loi normale.

Aucune connaissance sur l'interpolation affine avec la table de la loi normale centrée réduite n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

## STATISTIQUE INFÉRENTIELLE

Sous l'impulsion notamment du mouvement de la qualité, les méthodes statistiques sont aujourd'hui largement utilisées dans les milieux économique, social ou professionnel. Des procédures plus ou moins élaborées sont mises en œuvre, par exemple dans l'analyse des résultats d'expériences sur le vivant, les sondages, la maîtrise statistique des procédés, la fiabilité, les plans d'expériences. Des logiciels spécialisés exécutent automatiquement les calculs, suivant les normes AFNOR ou ISO.

Au-delà de l'exécution d'algorithmes ou de calculs dont les sens peu échappent, l'objectif essentiel de ce module est d'informer les étudiants, sur quelques cas simples, au raisonnement et méthodes statistiques et à l'interprétation des résultats obtenus.

Il s'agit de faire percevoir, à partir d'exemples figurant au programme, ce que sont les procédures de décision en univers aléatoire, ainsi que leur pertinence. Pour cela, la réalisation de simulations dans le cadre du modèle probabiliste de référence peut fournir un éclairage intéressant.

On soulignera que la validité d'une méthode statistique est liée à l'adéquation entre la réalité et le modèle la représentant.

On évitera les situations artificielles et on privilégiera les exemples issus de la vie économique et sociale ou du domaine professionnel, en liaison avec les enseignements d'autres disciplines ; dans le cadre de cette liaison, on pourra donner quelques exemples d'autres procédures que celles figurant au programme de mathématiques (par exemple utilisation de la droite de Henry, du test du  $\chi^2$  de la loi de Student), en privilégiant les aspects qualitatifs, mais aucune connaissance à leur sujet n'est exigible dans le cadre de ce programme.

On se placera dans le cadre d'échantillons considérés comme réalisations de variables aléatoires indépendantes.

a) Estimation ponctuelle d'un paramètre :  
- fréquence ;  
- moyenne et écart type.

b) Estimation par un intervalle de confiance d'un paramètre :  
- fréquence dans le cas d'une loi binomiale approximable par une loi normale ;  
- moyenne, dans le cas d'une loi normale quand son écart type est connu ou dans le cas de grands échantillons.

c) Tests d'hypothèse :  
- relatifs à une fréquence  $p$ , dans le cas d'une loi binomiale approximable par une loi normale,  
tester  $p = p_0$  contre  $p > p_0$ , contre  $p < p_0$   
tester  $p = p_0$  contre  $p \neq p_0$  ;  
- relatifs à une moyenne  $m$ , dans le cas de la loi normale,  
tester  $m = m_0$  contre  $m > m_0$ , contre  $m < m_0$  ;  
tester  $m = m_0$  contre  $m \neq m_0$  ;  
- comparaison de deux proportions ou de deux moyennes.

Une illustration qualitative succincte des notions de biais et de convergence d'un estimateur peut être proposée, mais toute étude mathématique de ces qualités est hors programme.

On distinguera confiance et probabilité :

- avant le tirage d'un échantillon, la procédure d'observateur de l'intervalle de confiance a une **probabilité**  $1 - \alpha$  que cet intervalle contienne le paramètre inconnu,  
- après le tirage, le paramètre est dans l'intervalle calculé avec une **confiance**  $1 - \alpha$ .

La taille  $n$  de l'échantillon sera suffisamment grande ( $n \geq 30$ ).

On soulignera que la décision prise, rejet ou acceptation dépend des choix faits *a priori* par l'utilisateur : choix de l'hypothèse nulle, choix du seuil de signification.

### Travaux pratiques

1° Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance de la fréquence, dans le cas d'une loi binomiale connue, à partir d'échantillons simulés.

2° Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance de fréquences.  
Estimation ponctuelle de moyennes, d'écart-types et estimation par intervalle de confiance de moyennes, dans des situations relevant de la loi normale.

3° Construction et utilisation de tests  
- unilatéraux et bilatéraux relatifs à une fréquence ;  
- unilatéraux et bilatéraux relatifs à une moyenne dans des situations relevant de la loi normale.

4° Construction et utilisation de tests de comparaison de deux proportions ou de deux moyennes.

5° Exemples d'utilisation de la droite de Henry, du test du  $\chi^2$ , du test de Student (cas des petits échantillons).

La connaissance *a priori* de la loi sous-jacente permet de comparer le paramètre réel et les estimations obtenues à partir des échantillons.

Aucune connaissance sur ce TP n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

Quand  $n$  est grand, le théorème de la limite centrée event la procédure mise au point pour les échantillons gaussiens à des cas plus généraux.

La construction d'un test comporte le choix des hypothèses nulle et alternative, la détermination de la région critique et l'énoncé de la règle de décision.

Cette comparaison peut permettre, par exemple, d'apprécier une éventuelle amélioration dans un processus de fabrication.

Ce TP n'est à réaliser, en entier ou en partie, qu'en liaison avec les enseignements des disciplines professionnelles et seulement si dans celles-ci, ces procédures sont utilisées.

Aucune connaissance à son sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.