Annexe IV

CLASSE DE DEUXIÈME ANNÉE PT

OBJECTIFS DE FORMATION ET PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

I. OBJECTIFS DE FORMATION DE LA FILIÈRE PT

1- Objectifs généraux de la formation

Dans la filière Physique et Technologie, les mathématiques constituent conjointement :

- une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques,
- une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires aux sciences physiques, à l'informatique, à la chimie et aux sciences industrielles.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, ainsi que la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions et les énoncés des théorèmes figurant au programme, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes. Les démonstrations qui sont utiles à une bonne compréhension du cours sont au programme. En revanche, certains résultats puissants utiles aux sciences de l'ingénieur sont admis.

a) Objectifs de la formation

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :

- Développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur.
- Promouvoir la réflexion personnelle des étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.
- Exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé, sont des éléments indissociables de cette démarche ; valoriser ainsi l'interaction entre d'une part l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, et d'autre part l'élaboration et la mise en œuvre des concepts théoriques, les phases d'abstraction et de mise en théorie interagissant donc constamment avec celles de passage aux exemples et aux applications.
- Privilégier les problèmes mathématiques susceptibles de développer la réflexion personnelle des étudiants et les capacités de synthèse. En particulier, on ne saurait en aucun cas se limiter à l'étude de problèmes dont les énoncés sont fermés et d'exercices mettant en œuvre des techniques bien répertoriées. Il est nécessaire d'entraîner les étudiants à se poser eux-mêmes des questions, c'est-à-dire à prendre en compte une problématique mathématique.

b) Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme d'une même discipline, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. Plus largement, l'enseignement d'une discipline scientifique est à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : organisation concertée des activités d'enseignement d'une même classe ; étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les champs de connaissances (mathématiques et physique, mathématiques et informatique, mathématiques et sciences industrielles, ...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, y contribue de façon efficace, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés.

Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

PT

2- Architecture et contenus des programmes

a) Intentions majeures

Les contenus sont organisés autour de trois intentions majeures :

- Organiser les programmes autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.

- Donner un rôle très important à la résolution de problèmes et d'exercices d'application, pour certains en mettant en œuvre l'outil informatique. Le but est d'indiquer le champ des problèmes et phénomènes mathématiques à étudier en relation avec les concepts figurant au programme et de préciser les méthodes et les techniques usuelles exigibles des étudiants. En revanche, l'étude de ces problèmes ne doit pas conduire à des dépassements de programme prenant la forme d'une anthologie d'exemples dont la connaissance serait exigible des étudiants.

- Réaliser un équilibre global entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Il va de soi, d'ailleurs, que cette séparation traditionnelle n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre ces trois grands domaines des mathématiques. Dans cette intention, les programmes sont présentés selon deux grandes parties : algèbre linéaire et géométrie, analyse et géométrie différentielle, mais le plan du programme n'est pas un plan de cours.

C'est en fonction des objectifs précédents que les programmes sont conçus et que l'horaire hebdomadaire doit être géré. Dans les classes PTSI et PT, il est de 9 heures (6 heures de cours et 3 heures de travaux dirigés). Pour valoriser les concepts essentiels et les principales méthodes, il convient de consacrer à leur étude environ 5 heures de cours en classe PTSI et PT. Dans les deux classes, les 4 heures restantes (1 heure de cours et 3 heures de travaux dirigés) sont à consacrer à l'étude de problèmes mathématiques de difficulté variée ; à cet égard, toute technicité gratuite est à éviter.

b) Secteur de l'analyse et de ses interventions

Dans ce secteur, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de fonction et de suite (ou série) qui permettent de modéliser le comportement de modèles continus ou discrets. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur, en particulier en seconde année.
Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle de problèmes quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global de suites ou de fonctions avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Pour l'ensemble de l'analyse, il met l'accent sur les techniques de majoration.

c) Secteur de l'algèbre et de ses interventions

Dans ce secteur, le programme est centré autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (points de vue géométrique et matriciel), tandis que l'étude des groupes, des anneaux et des corps en a été écartée.
Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.

d) Secteur de la géométrie et de ses interventions

Une vision géométrique des problèmes imprégne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention par les apports du langage géométrique et des modes de représentation. La géométrie différentielle (étude des courbes et des surfaces) est un élément essentiel de la formation, en relation notamment avec la physique et les sciences industrielles.

e) Articulation avec les sciences physiques et les sciences industrielles

En relation étroite avec les concepts propres aux sciences physiques, la chimie et aux sciences industrielles (mécanique, électrocinétique, électronique, optique, cinétique chimique), le programme valorise les interprétations cinématiques et dynamiques des concepts de l'analyse et de la géométrie, ainsi que leurs interprétations en termes de signaux continus ou discrets (vitesse et accélération, trajectoires et lignes de niveau, équations différentielles modélisant l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques). Ces interprétations, conjointement avec les interprétations graphiques et géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse.

PT

3- Conception et organisation de la formation

a) Organisation du travail de la classe

Il convient de centrer l'enseignement autour de l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, les concepts et les développements théoriques étant au service de cette étude. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous-tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu.
Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :

- Promouvoir l'acquisition de méthodes et entraîner les étudiants à exploiter toute la richesse de la démarche mathématique ; la classe est donc un lieu de découverte, d'exploitation de problématiques, un lieu de réflexion et de débats sur les démarches suivies, d'analyse des hypothèses d'un théorème et de la portée des concepts mis en jeu et des résultats obtenus. Elle est aussi un lieu d'élaboration de synthèses ayant pour objectif de dégager clairement les idées et méthodes essentielles. Dans cette perspective, les enseignements combinent de façon organique la formulation et l'analyse de problèmes, l'élaboration de concepts, la présentation, la démonstration et la mise en œuvre de résultats, ainsi que la mise en valeur de méthodes.
- Développer les capacités de communication. La pertinence des indications écrites et orales données par le professeur et la qualité de structuration des échanges interpersonnels jouent ici un rôle essentiel : qualités d'écoute et d'expression orale, qualités de lecture et d'expression écrite. La communication utilise des moyens diversifiés : non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément important, mais aussi le rétroprojecteur et l'ordinateur connecté à un vidéoprojecteur.

b) Organisation du travail personnel des étudiants

Les travaux effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, ont une importance capitale ; leurs fonctions sont diversifiées :

- L'étude du cours joue un rôle central. Son objectif est triple ; connaître les concepts et résultats essentiels, savoir analyser les démarches mises en jeu dans les démonstrations et les techniques de raisonnement, maîtriser les méthodes d'étude des problèmes. L'étude du cours est donc indissociable de celle des problèmes.
- La résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, a pour fonction d'affermir les connaissances de base des étudiants et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples. La résolution de tels exercices n'est donc pas un objectif en soi, et tout excès de technicité doit être évité. La maîtrise de ce type d'exercices est une exigence valable pour l'ensemble des étudiants.
- L'étude de questions plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux étudiants d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances de façon coordonnée. Au sein d'une même classe, les thèmes d'étude peuvent être diversifiés, en fonction du projet de formation des étudiants.
- Les travaux individuels de rédaction en temps libre (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les capacités d'expression écrite et de mise au point d'un raisonnement. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. Ces travaux de rédaction doivent donc être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable. Leur contenu peut être diversifié en fonction du projet de formation des étudiants.
- La recherche et l'exploitation (individuelle ou en équipe) de documents contribue au développement des capacités d'autonomie. Elle permet aussi de développer l'ouverture d'esprit, grâce à la prise de connaissance de points de vue diversifiés sur une même question, et les capacités d'analyse critique, grâce à une analyse comparée de ces points de vue. Elle permet enfin aux étudiants d'approfondir leurs connaissances en complément des travaux menés en classe ou en fonction de leurs centres d'intérêt et de leur projet de formation.
- La préparation et la mise en œuvre d'exposés visent à développer les capacités d'organisation de la pensée et les qualités d'expression orale.

c) Les épreuves écrites en temps limité

- En première année, ces épreuves doivent être de taille raisonnable et de difficulté progressive, afin de ne pas décourager les étudiants et de leur permettre de rédiger clairement une solution ;
- en seconde année, leur longueur doit être augmentée pour permettre une préparation efficace aux épreuves de concours.

Les connaissances exigibles dans ces épreuves ne doivent en aucun cas dépasser celles qui figurent au programme ; si d'autres connaissances sont à mettre en œuvre, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants. Lorsqu'il s'agit d'épreuves de concours de longueur importante, le barème doit en tenir compte.

d) Évaluation et notation des étudiants

La communication des objectifs à atteindre et la mise en œuvre de formes diversifiées d'évaluation peuvent aider de manière efficace les étudiants à progresser, à se situer et à affiner un choix d'orientation.
La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important ; ce calibrage doit être établi en relation avec les performances attendues des étudiants de seconde année dans les épreuves de concours. Il convient d'éviter tant la surnotation, génératrice d'illusion, que la sousnotation, génératrice de découragement.

e) Interprétation et délimitation des programmes

Pour chacune des classes, les connaissances et les capacités exigibles des étudiants sont indiquées avec précision, de façon à combattre l'inflation théorique autant que l'excès de technicité. Il importe de souligner la nécessité impérieuse de respecter les limites du programme, tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation. Un encyclopédisme relayé par la pratique du bachotage irait totalement à l'encontre du but recherché, qui tend à privilégier une formation de l'esprit scientifique fondée sur l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales. Il importe que cet état d'esprit trouve sa traduction dans les sujets des épreuves d'évaluation.

4- Organisation du texte des programmes

Ce texte est organisé en deux titres : algèbre linéaire et géométrie, analyse et géométrie différentielle. Chacun de ces titres comporte des parties (numérotées I, II, ...), elles-mêmes subdivisées en chapitres (numérotés 1, 2, ...), puis en paragraphes (repérés a, b, ...). Chacune des parties comporte :
- En tête de partie ou de chapitre, un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à cette partie ou à ce chapitre.
- Pour chaque paragraphe, un texte présenté en deux colonnes ; à gauche sont fixées les connaissances et les méthodes figurant au programme, à droite un commentaire indique les exemples fondamentaux à connaître et les méthodes à maîtriser, précise le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres parties du programme.
- Certains thèmes, qui peuvent donner lieu à l'emploi d'un logiciel de calcul symbolique et formel ou d'un logiciel de programmation, en particulier au cours des travaux pratiques d'informatique, sont repérés par le signe §. Ils complètent la liste donnée sous le titre « ACTIVITÉS ALGORITHMIQUES ET INFORMATIQUES ».

5- Connaissances et capacités exigibles des étudiants

Le programme de mathématiques de la filière Physique et Technologie comporte conjointement celui des classes de seconde année PT et PT*, fixé par le présent texte, et celui de la classe de première année PTSI.

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, exemples, contre-exemples, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mise en œuvre de ces connaissances, le texte du programme délimite de manière précise trois catégories.

a) *Celles qui sont exigibles des étudiants :* il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents paragraphes, des points qui sont repérés comme tels dans la colonne de droite ou dans les bandeaux, à l'exception de ceux qui sont repérés par la mention « Exemples de ... ». Les démonstrations des résultats concernés sont exigibles des étudiants, sauf mention expresse du contraire.
Enfin, aucun développement ne doit être donné aux notions figurant au programme lorsqu'elles sont uniquement repérées par la locution « définition de ... » ; seule cette définition est alors exigible des étudiants.

b) *Celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants :* il s'agit de tous les travaux dont l'énoncé commence par la locution « Exemples de ... » et des points repérés dans les bandeaux ou dans la colonne de droite par la locution « aucune connaissance spécifique sur ... n'est exigible des étudiants ». Lorsqu'une épreuve d'évaluation fait intervenir de telles connaissances ou de telles capacités, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants.
En ce qui concerne les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérés dans la colonne de droite par la locution « la démonstration n'est pas exigible des étudiants », le professeur peut, suivant les cas, démontrer en détail le résultat considéré, indiquer l'idée de sa démonstration ou l'admettre.

c) *Celles qui sont indiquées comme étant « hors programme »* dans les bandeaux ou dans la colonne de droite. Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation.
En particulier, la locution « la démonstration est hors programme » signifie qu'il est demandé d'admettre le résultat ; aucune épreuve d'évaluation ne peut comporter une telle démonstration.

PT

II PROGRAMME DES CLASSES PT ET PT*

ACTIVITÉS ALGORITHMIQUES ET INFORMATIQUE

1- Intégration de l'outil informatique

a) La démarche algorithmique

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes. Les algorithmes associés aux notions étudiées dans le programme de mathématiques en font partie. En revanche, en mathématiques, aucune connaissance sur la théorie des algorithmes, aucun résultat général sur leurs performances n'est exigible des étudiants.

b) Le calcul symbolique et formel. L'emploi des calculatrices.

Les étudiants doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques du logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures, ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel évite des calculs fastidieux, et permet l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. Ils doivent pareillement savoir utiliser une calculatrice possédant des fonctionnalités de calcul formel.

Ils doivent également savoir utiliser une calculatrice programmable, dans les situations liées au programme de mathématiques. Cette utilisation permet notamment la mise en œuvre d'une partie des algorithmes du programme, à l'occasion des travaux pratiques de mathématiques.

Ils doivent savoir programmer une instruction séquentielle, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

2- Propositions d'activités algorithmiques

À titre d'illustration, les seules compétences exigibles des étudiants étant celles décrites ci-dessus, le professeur pourra aborder certains des exemples indiqués ci-dessous ; il s'agit d'exemples, qui ne constituent en aucun cas une extension du programme.

a) Arithmétique

Algorithme d'exponentiation rapide.
Algorithme d'Euclide.

b) Algèbre linéaire

Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.	Lissage par moindres carrés. Résolution de systèmes linéaires sur-déterminés. Inversion d'une matrice.
Détermination d'éléments propres pour des matrices de grande dimension.	Méthode de la puissance itérée.

c) Analyse

Approximation du point fixe d'une application scalaire par itération.	Résolution d'équations numériques. Méthode de Newton.
Approximation du point fixe d'une application vectorielle par itération.	Résolution de systèmes d'équations numériques. Méthode de Newton.

3- Propositions d'utilisation d'un logiciel de calcul formel

En plus des points énumérés dans les paragraphes a) et b) ci-dessus, un logiciel de calcul formel pourra être utilisé en analyse, en particulier dans les domaines suivants :

Représentation des surfaces.	Lignes de niveau.
Étude d'équations différentielles.	Tracé des courbes intégrales.
Approximation des fonctions.	Séries de Fourier.

PT

SOMMAIRE

PT

2- Séries entières
a) Convergence d'une série entière
b) Somme d'une série entière d'une variable réelle
c) Exponentielle complexe

3- Séries de Fourier
a) Définitions
b) Formule de Parseval
c) Convergence d'une série de Fourier

III. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1- Équations différentielles linéaires
a) Systèmes linéaires à coefficients constants
b) Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

2- Notions sur les équations différentielles non linéaires

IV. FONCTIONS DE $\mathbf{R}^p$ DANS $\mathbf{R}^n$

1- Continuité

2- Calcul différentiel
a) Différentielle et matrice jacobienne
b) Dérivées partielles d'ordre supérieur
c) Équations aux dérivées partielles
d) Formule de Taylor-Young

3- Calcul intégral
a) Intégrales doubles et triples, applications
b) Analyse vectorielle

V. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

1- Courbes planes
a) Enveloppes
b) Développée, développantes

2- Courbes et surfaces
a) Courbes de l'espace
b) Plan tangent à une surface
c) Intersection de deux surfaces

3- Surfaces usuelles

PT

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme d'algèbre linéaire se propose de donner l'outil essentiel de la réduction des endomorphismes. C'est l'occasion d'utiliser les outils et les techniques construits en première année (calcul matriciel, résolution des systèmes linéaires). Les déterminants sont introduits en dimension n pour servir d'outil dans les problèmes de réduction des endomorphismes, et le calcul des déterminants n'est pas une fin en soi. On évitera particulièrement sur ce point tout excès de technicité.

I. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARRÉES

Dans ce chapitre, le corps des scalaires, noté $\mathbf{K}$ *est* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

1- Espaces vectoriels

Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice en dimension quelconque.

La notion de somme directe n'est au programme que dans le cas de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.

Équation linéaire $f(x) = b$, avec f application linéaire de E vers F de dimensions quelconques.
Cas de l'équation homogène.
Structure des solutions, condition de compatibilité, lien avec $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Étude du cas où $b = b_1 + b_2$.

Pour l'équation homogène, l'ensemble des solutions est l'espace vectoriel $\operatorname{Ker} f$.
Dans le cas général, il est vide si $b \notin \operatorname{Im} f$, et de la forme $x_0 + \operatorname{Ker} f = \{x_0 + x \mid x \in \operatorname{Ker} f\}$ si $b \in \operatorname{Im} f$.

2- Valeurs propres et vecteurs propres

Valeurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres, vecteurs propres.
Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

On convient qu'un vecteur propre est non nul.
Éléments propres d'une homothétie, d'une projection, d'une symétrie.

3- Déterminants

a) Déterminant de n vecteurs dans une base.

Définition d'une forme n−linéaire alternée sur un espace de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n. Caractérisation des bases.

La démonstration de l'existence du déterminant n'est pas exigible des étudiants.

Échange de deux vecteurs.

b) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

c) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices. Développement par rapport à une ligne ou à une colonne (admis).

Matrices carrées semblables, définition, interprétation en terme de changement de base. Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

Le groupe symétrique n'étant pas au programme, l'expression du déterminant d'une matrice en fonction de ses coefficients n'est pas non plus au programme. Le déterminant d'une matrice carrée est par définition le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

Déterminant de la transposée d'une matrice.

Démonstration hors programme.

Déterminant d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Démonstration non exigible.

PT

4- Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre : il est minoré par la dimension du sous-espace propre associé.

Endomorphismes diagonalisables (par définition $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u).
Caractérisation (admise) à l'aide des dimensions des sous-espaces propres.
En dimension n, tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique a n racines (distinctes) est diagonalisable.

Quand l'endomorphisme est diagonalisable, on obtient une base de diagonalisation par réunion de bases de chacun des sous-espaces propres.

Trigonalisation d'un endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé : il existe une base telle que la matrice associée à u dans cette base soit triangulaire supérieure (théorème admis). Les étudiants n'ont pas à connaître de méthode pour trouver une telle base.

Mis à part les cas élémentaires (endomorphisme d'un espace de dimension 3 ayant deux valeurs propres distinctes par exemple), tout exercice de trigonalisation doit comporter une indication.

5- Réduction des matrices carrées

Valeurs propres d'une matrice carrée, polynôme caractéristique, vecteurs propres, sous-espaces propres.

Trace d'une matrice ;
linéarité de la trace, relation $\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA$.

Deux matrices semblables ont même trace et même polynôme caractéristique.

Diagonalisation et trigonalisation des matrices carrées.

Toute matrice carrée dont le polynôme caractéristique est scindé est semblable à une matrice triangulaire supérieure (résultat admis).

Les étudiants n'ont pas à connaître de méthode générale de trigonalisation.

§ Application à l'étude, sur des exemples du comportement des puissances n-ièmes d'une matrice.

Application à l'étude de suites numériques satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

On se limitera aux relations de la forme $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d$.

II. ESPACES VECTORIELS PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

Dans ce chapitre, le corps des scalaires est **R**.

1- Espaces préhilbertiens réels.

Les espaces vectoriels considérés dans ce paragraphe ne sont pas nécessairement de dimension finie. On se bornera aux points élémentaires qui suivent, en liaison avec le programme d'analyse.

Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme.
Théorème de Pythagore.

Définition d'une famille orthonormale.
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.

Lorsque l'espace est de dimension finie, existence de bases orthonormales ; méthode de Schmidt.

Principe des méthodes de moindres carrés.

La méthode sera développée uniquement sur des exemples.

2- Espaces euclidiens (c'est-à-dire préhilbertiens réels de dimension finie)

a) Groupe orthogonal

Définitions d'un automorphisme orthogonal, du groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$. Matrices orthogonales, groupe $\mathcal{O}(n)$.

En liaison avec le programme de première année, on décrira le groupe orthogonal en dimensions 2 et 3 (et seulement dans ces cas).

b) Endomorphismes symétriques

Définition d'un endomorphisme symétrique ; matrice associée dans une base orthonormale.

Théorème admis de réduction d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale.

Diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale.

c) Formes quadratiques

Définitions d'une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^n$, d'une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ et de la forme polaire associée.

Sont hors programme toute notion générale sur les formes bilinéaires, ainsi que les notions de rang et de signature d'une forme quadratique.

Matrice d'une forme bilinéaire symétrique (resp. d'une forme quadratique) dans une base orthonormale.

On reliera l'étude des formes quadratiques à celle de la matrice de l'opérateur d'inertie d'un solide, qui figure au programme de mécanique.

Réduction d'une forme quadratique dans une base orthonormale.

La réduction d'une forme quadratique dans une base non orthonormale est hors programme.

Application à la recherche de l'équation réduite et des axes d'une conique ou d'une quadrique dont un centre de symétrie est donné.

PT

ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Le programme d'analyse est organisé autour des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, et de leurs interventions en calcul différentiel et intégral. L'essentiel est que les étudiants sachent mettre en œuvre et utiliser les techniques de base de l'analyse, déjà vues en première année (encadrement, passage à la limite, approximation).
L'accent est mis sur l'expression des fonctions comme somme d'une série entière ou d'une série de Fourier. Il convient de noter toutefois qu'aucune notion générale n'est au programme sur les suites et les séries de fonctions et leurs modes de convergence.
L'étude des espaces vectoriels normés n'est pas au programme, et seules les normes euclidiennes ou préhilbertiennes sont utilisées. Dans ce cadre, les étudiants doivent connaître les notions suivantes : définition d'une norme associée à un produit scalaire sur un espace vectoriel réel ou complexe, distance associée, boules, parties bornées, convergence d'une suite ; en revanche, mis à part le cas de $\mathbf{R}^n$ *et de* $\mathbf{C}^n$ *le langage des ouverts et des fermés n'est pas au programme, et la continuité n'est traitée que pour les fonctions de plusieurs variables réelles.*

Les problèmes et les méthodes numériques doivent tenir une large place, non seulement en analyse, mais aussi en algèbre et en géométrie, à un double titre :
- *illustration de la portée des résultats et des concepts, et, en retour, motivation pour leur étude ;*
- *recherche et mise en forme d'algorithmes, et comparaison expérimentale de leurs performances.*

Les aspects numériques sont donc étroitement associés aux problèmes mathématiques dont ils relèvent.

De nombreux outils du programme, répartis dans l'ensemble du programme, concourent à l'obtention de représentations graphiques :
- *les méthodes de construction géométrique dans le plan ;*
- *les méthodes numériques employant les ressources de l'algèbre de l'analyse et de la géométrie différentielle ;*
- *les méthodes de représentation des configurations de l'espace par projection sur des plans de coordonnées ou à l'aide de familles de sections planes ;*

Les thèmes d'activités numériques, algorithmiques ou graphiques sont repérés par le signe §.

I. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ *ou* $\mathbf{R}^m$.

1- Norme euclidienne dans $\mathbf{R}^m$

Norme et distance euclidienne dans $\mathbf{R}^m$. Définitions des boules, des parties ouvertes, des parties fermées, des parties bornées.
Limite d'une suite d'éléments à valeurs dans $\mathbf{R}^m$; caractérisation à l'aide des suites coordonnées. Toute suite convergente est bornée. Opérations algébriques.

2- Dérivation et intégration des fonctions d'une variable réelle

Dans ce chapitre, sauf dans le paragraphe b), les fonctions considérées sont à valeurs dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^m$.

a) Dérivée en un point, fonction dérivée

Dérivabilité en un point : dérivée, dérivée à gauche, dérivée à droite. Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée.	Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point.
Définition des applications de classe C^k sur un intervalle I (k entier naturel ou $k=\infty$). Espace vectoriel $C^k(I,\mathbf{R}^m)$ des applications de classe C^k de I dans $\mathbf{R}^m$. Dérivée d'une somme de deux fonctions vectorielles, du produit d'une fonction à valeurs réelles et d'une fonction à valeurs vectorielles.	

Pour $m = 2$ ou $m = 3$, et $\mathbf{R}^m$ euclidien (éventuellement orienté), dérivées successives d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel.

Les étudiants doivent connaître la formule de Leibniz, pour les fonctions du type :

$$t \mapsto \lambda(t)V(t),$$

$$t \mapsto U(t) \cdot V(t), \text{ et } t \mapsto U(t) \wedge V(t),$$

où $\lambda \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$, $U, V \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R}^m)$.

b) Intégration des fonctions continues par morceaux à valeurs réelles ou complexes

Rappel de la définition d'une fonction continue par morceaux définie sur un segment $[a, b]$; définition d'une fonction continue par morceaux définie sur un intervalle quelconque.

Opérations sur les fonctions continues par morceaux.

Une fonction définie sur un intervalle I quelconque est continue par morceaux si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

Rappel de la définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles ou complexes. Propriétés :

- linéarité ;
- relation de Chasles ;
- inégalité de la moyenne (pour $a < b$) :

$$\left| \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Les démonstrations des propriétés sont non exigibles.

c) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : une fonction f définie sur le segment $[a, b]$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une suite finie strictement croissante $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Par extension, une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ et T−périodique est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si sa restriction à un intervalle de la forme $[a, a+T]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux définies sur le segment $[a, b]$.

d) Formule de Taylor-Young

Développement limité d'ordre p en un point. Opérations sur les développements limités.
Existence d'un développement limité d'ordre p pour une fonction de classe $\mathcal{C}^p$: formule de Taylor-Young.

3- Intégrales impropres

Pour ce qui concerne les intégrales impropres (ou généralisées), l'objectif du programme est la maîtrise de la convergence absolue de l'intégrale d'une fonction continue à valeurs réelles ou complexes sur un intervalle non fermé ou non borné, en vue de la définition de l'intégration sur un intervalle quelconque. Le programme part de la définition générale de la convergence, en raison de la simplicité de la présentation, mais l'étude de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.

a) Définition d'une intégrale impropre convergente

Si f est une application continue par morceaux sur $[a, b[$ l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente, par définition, si $\int_a^x f(t)\,dt$ a une limite finie lorsque x tend vers b, en restant dans $[a, b[$.

Définition des intégrales divergentes.

On aura soin de distinguer, dans la présentation, le cas où f est une fonction continue *par morceaux* non bornée sur un intervalle $[a, b[$ borné, et le cas où l'intervalle est non borné (du type $[a, +\infty[$ par exemple).

PT

Nature des intégrales :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \text{ où } \alpha \in \mathbf{R};$$

$$\int_0^1 \ln t \, dt, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \, dt, \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}_+^*.$$

b) Intégrales des fonctions positives

Relations entre la convergence ou la divergence des intégrales de f et de g, dans le cas où $f \leqslant g$, et dans le cas où $f \sim g$.

c) Intégrales absolument convergentes

On dit que f, continue par morceaux sur I, a une intégrale absolument convergente si l'intégrale de la fonction $|f| : t \mapsto |f(t)|$ est convergente.

Une intégrale absolument convergente est convergente.

Résultat admis.

Comparaison en module à des fonctions réelles positives, du type : $|f| \leqslant g$, ou $|f| \sim g$.

4- Intégration sur un intervalle quelconque

Une fonction f, continue par morceaux sur un intervalle I qui n'est pas un segment est intégrable sur I si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :
- f admet sur I une intégrale absolument convergente ;
- il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout segment J inclus dans I, on ait :

$$\int_J |f(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant M.$$

La démonstration de l'équivalence des deux propriétés est non exigible.

Si I est un intervalle quelconque, et f est intégrable sur I, on appelle intégrale de f sur I et on note $\int_I f$
- si I est un segment, l'intégrale de f sur I
- si I n'est pas un segment, son intégrale impropre sur I.

Brève extension des propriétés vues dans le cadre de l'intégrale sur un segment (linéarité, relation de Chasles, inégalité de la moyenne).

Relation de Chasles : si f est intégrable sur I et sur J, si $I \cup J$ est un intervalle et si $I \cap J$ est vide ou réduit à un point :

$$\int_I f + \int_J f = \int_{I \cup J} f.$$

Changement de variable : étant données une fonction f intégrable sur I et une bijection φ d'un intervalle I' sur I, de classe C^1 sur I',

$$\int_I f = \int_{I'} f \circ \varphi \cdot |\varphi'|.$$

La démonstration de ce théorème est non exigible.

PT

5- Intégrales dépendant d'un paramètre

Les théorèmes qui suivent, qui doivent être admis sans démonstration, ont pour but de donner aux étudiants des outils pour étudier les fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.

a) Continuité sous le signe $\int$

Soit I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$, continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t telle que pour tout élément x de I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ soit intégrable sur J. S'il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout élément (x,t) de $I \times J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ (hypothèse de domination), alors la fonction g définie sur I par la relation $g(x) = \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie $K \times J$ ou K est un segment contenu dans I.

b) Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz)

Soit I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$ et dérivable par rapport à x. On suppose que :

- pour tout $x \in I$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur J ;
- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue ;
- il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout élément (x,t) de $I \times J$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

On insistera sur la nécessité de la propriété de domination pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et

$$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

II. SÉRIES

1- Séries de nombres réels ou complexes

Comme pour les intégrales impropres, l'objectif est ici l'étude de la convergence absolue des séries à termes réels ou complexes. L'étude de la semi-convergence est limitée aux séries réelles alternées par utilisation de la règle spéciale.

a) Convergence

Séries convergentes, séries divergentes. Convergence des séries géométriques.

b) Séries à termes réels positifs

Comparaison à une intégrale.
Convergence des séries de Riemann.

Comparaison des convergences de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dans le cas où $u_n \leqslant v_n$ et dans le cas où $u_n \sim v_n$.

Application au cas où l'une des deux séries est une série de Riemann.

PT

Comparaison à une série géométrique ; règle de d'Alembert.	Toute autre règle de convergence, en particulier la règle dite de Cauchy (utilisant $\sqrt[n]{u_n}$) est hors programme.

c) Convergence absolue

Séries absolument convergentes.	
Toute série absolument convergente est convergente.	Démonstration non exigible.

d) Séries alternées

Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; encadrement de la somme et du reste.	

e) Opérations

Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire.	La notion de série produit est hors programme.

2- Séries entières

Les séries entières considérées dans ce paragraphe sont à coefficients réels ou complexes.

a) Convergence d'une série entière

Définition des séries entières d'une variable complexe. Étude de la convergence : rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence.	Dans le cas où le rayon de convergence est un nombre réel $R > 0$, toute étude systématique de la convergence sur le cercle $C(0, R)$ est exclue.

b) Somme d'une série entière d'une variable réelle

Intervalle de convergence. Propriétés (admises) de la fonction somme d'une série entière sur l'intervalle (ouvert) de convergence : continuité, dérivation et intégration terme à terme (avec conservation du rayon de convergence).	On admettra que si le rayon de convergence est un nombre réel $R > 0$, et si de plus la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $x = R$ (resp. pour $x = -R$), la somme est continue sur $[0, R]$ (resp. $[-R, 0]$).
Développement en série entière autour de 0 de $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et $(1+x)^\alpha$, où α est réel.	Seuls ces exemples sont à connaître.

c) Exponentielle complexe

Expression (admise), pour z complexe, de $\exp z$ (ou e^z) comme somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.	Rappel : en première année, on a défini $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

3- Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont présentées dans le cadre des fonctions numériques T−périodiques continues par morceaux (T est un nombre réel strictement positif, et on pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$). L'interprétation géométrique des séries de Fourier sera donnée dans le cadre de l'espace vectoriel $\mathcal{C}_T(\mathbf{R})$ des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et T−périodiques.

§ Il convient d'exploiter l'interprétation en termes d'analyse harmonique des signaux périodiques.

a) Définitions

Coefficients de Fourier d'une fonction T−périodique f définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et continue par morceaux (expression en cosinus et sinus, en posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$), sommes partielles

$$S_n(f)(t) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\cos(k\omega t) + b_k(f)\sin(k\omega t)\right)$$

de la série de Fourier d'une telle fonction.

Dans certains cas, on peut simplifier les calculs en définissant pour $n \in \mathbf{N}, n > 0$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f))$$

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)),$$

$$\text{et } c_0(f) = a_0(f),$$

mais aucune formule relative à la forme exponentielle des coefficients de Fourier n'est exigible.

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}_T(\mathbf{R})$ des applications T−périodiques continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,dt,$$

norme associée.
Dans cet espace, les fonctions $t \mapsto \cos(n\omega t)$ pour n décrivant $\mathbf{N}$, et $t \mapsto \sin(n\omega t)$ pour n décrivant $\mathbf{N}^*$ forment une famille orthogonale.

Dans ce cadre, on donnera l'interprétation de $S_n(f)$ comme projection orthogonale de f.

b) Formule de Parseval

Théorème de Parseval (admis) : convergence et expression

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

On donnera l'interprétation géométrique du théorème de Parseval dans l'espace $\mathcal{C}_T(\mathbf{R})$.

c) Convergence d'une série de Fourier

Théorème de Dirichlet (admis) : pour une fonction T−périodique f définie sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, lorsque n tend vers l'infini, les sommes de Fourier $S_n(f)(t)$ convergent en tout t réel, vers $\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$, demi-somme des limites à droite et à gauche de f au point t.

Cas où f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

PT

III. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

L'objectif de cette partie est d'étudier les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants et les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre un ou deux, avec une attention toute particulière aux systèmes autonomes. Cette étude doit être accompagnée d'interprétations géométriques et de représentations graphiques.

Il convient de relier cette étude à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d'étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d'entrée et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance. On peut alors être amené à étendre la notion de solution (fonction C^1 ou C^2 par morceaux).

Il convient aussi de valoriser l'utilisation des équations ou systèmes différentiels dans la résolution de problèmes de nature géométrique ou cinématique.

1- Équations différentielles linéaires

a) Systèmes linéaires à coefficients constants

Définition d'une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $X' = AX + B(t)$ où A est une matrice réelle ou complexe de taille n et B une application continue d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$.	
Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.
Système homogène associé, structure de l'ensemble des solutions.	Démonstration non exigible.
§ Pratique de la résolution de l'équation $X' = AX$, où A est une matrice à éléments réels ou complexes (par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire).	

b) Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

Équation $a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où a, b et c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes.	Structure de l'espace des solutions lorsque a ne s'annule pas sur I.
Étude, sur des exemples, du raccordement de solutions en un point où a s'annule.	
Équation $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$ où a, b, c et d sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes.	
Lorsque a ne s'annule pas sur I, existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.
Structure de l'espace des solutions de l'équation homogène. Expression des solutions de l'équation complète dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène associée ne s'annulant pas sur I.	
Exemples d'emploi de séries entières pour la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.	

2- Notions sur les équations différentielles non linéaires

En dehors du cas des équations à variables séparables, tout exercice d'intégration d'une équation différentielle non linéaire devra comporter l'indication d'une méthode.

Équations différentielles à variables séparables ; cas particulier des équations incomplètes.	On illustrera la notion de courbe intégrale.

Définition d'un système autonome de deux équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varphi(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \psi(x,y) \end{cases}$$

et de ses trajectoires, dans le cas où φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^2$.

Courbe intégrale d'un champ de vecteurs.

Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

§ Algorithme de recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 ou d'un système autonome de deux équations d'ordre 1 par la méthode d'Euler.

§ Exemples de construction de courbes intégrales d'une équation différentielle, de trajectoires d'un système autonome de deux équations différentielles d'ordre 1.

On se limitera à des exemples simples, principalement issus de la physique ou des sciences industrielles.

IV. FONCTIONS DE $\mathbf{R}^p$ DANS $\mathbf{R}^n$

Les applications considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie de $\mathbf{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. On se limitera aux cas où $n \leqslant 3$ et $p \leqslant 3$. On ne soulèvera aucune difficulté liée aux ensembles de définition des fonctions considérées. On rappelle que les seules normes considérées sont euclidiennes.

1- Continuité

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions étudiées dans ce paragraphe et tous les résultats sont admis.

Espace vectoriel des fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. Fonctions bornées.

Continuité d'une application en un point. Opérations algébriques sur les applications continues. Continuité d'une application composée.

L'image d'une partie fermée bornée par une fonction continue est fermée et bornée (résultat admis).

2- Calcul différentiel

L'objectif est d'aboutir à une bonne maîtrise de quelques problèmes usuels à partir d'un minimum d'outils théoriques. En particulier la notion d'application différentiable est hors programme et, comme en première année, les applications de classe $\mathcal{C}^1$ seront définies à partir des dérivées partielles.
Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

a) Différentielle et matrice jacobienne

Applications de classe $\mathcal{C}^1$, différentielle en un point, matrice jacobienne, jacobien. Lien avec le gradient. Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque (les applications considérées étant de classe $\mathcal{C}^1$).
Applications aux changements de variables.

On utilisera la notation différentielle :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

(pour deux variables par exemple)
très commode pour le calcul de la différentielle d'une fonction composée.

PT

b) Dérivées partielles d'ordre supérieur

Théorème de Schwarz pour une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur U (avec $k \geqslant 2$).

La démonstration du théorème de Schwarz est hors programme.

c) Équations aux dérivées partielles

Étude d'exemples simples d'équations aux dérivées partielles premières ou secondes.

On exploitera en particulier les techniques de changement de variables.

d) Formule de Taylor-Young

Pour une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$: formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admise) ; application à l'étude des extrémums locaux.

3- Calcul intégral

Les notions introduites dans ce paragraphe sont étudiées en vue de leur utilisation en sciences physiques ou en sciences industrielles. Tout développement théorique est exclu. Tous les résultats sont admis.

a) Intégrales doubles et triples, applications

Intégrales doubles et triples : calcul par intégrations successives, par changement de variables.

Cas particulier des passages en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques.

Intégrale sur un arc, circulation, formule de Green-Riemann.

Aire d'un morceau de surface.

Volume et éléments d'inertie d'un solide.

Exemples d'applications du calcul intégral à des problèmes issus de la physique ou des sciences industrielles.

b) Analyse vectorielle

Gradient, potentiel scalaire.

V. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Comme en première année, l'étude théorique est placée dans des hypothèses très larges. Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions étudiées dans ce chapitre.

1- Courbes planes

a) Enveloppes

Enveloppe d'une famille de droites définies par une relation $a(t)x+b(t)y+c(t)=0$, où a, b et c sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, sur lequel le déterminant

$$t \mapsto \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas.

b) Développée, développantes

Développée et développantes d'une courbe paramétrée plane.

2- Courbes et surfaces

Dans ce paragraphe, les courbes du plan et de l'espace et les surfaces sont définies par paramétrages et par équations cartésiennes. Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'équivalence de ces définitions.
Toutes les formes utiles (pour traiter ce paragraphe) du théorème des fonctions implicites sont admises.

a) Courbes de l'espace

Tangente et plan normal en un point régulier.
Longueur d'un arc, abscisse curviligne.

b) Plan tangent à une surface

En un point régulier d'une surface, plan tangent, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.

c) Intersection de deux surfaces

Projection sur un plan de coordonnées d'une courbe définie comme intersection de deux surfaces.

3- Surfaces usuelles

Description des cylindres (génératrices, sections droites), des cônes (sommet, génératrices), des surfaces de révolution (axe, méridienne, parallèles). Plans tangents aux surfaces précédentes. Description des quadriques à partir de leurs équations réduites en repère orthonormal (ellipsoïde, hyperboloïde à une nappe, hyperboloïde à deux nappes, paraboloïde elliptique, paraboloïde hyperbolique, cônes et cylindres du second degré).	
Définition d'une surface réglée, plan tangent en un point régulier. Exemples de surfaces développables (même plan tangent en tous les points réguliers d'une génératrice) : cylindre, cône, surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche.	Aucune autre connaissance sur les surfaces réglées et les surfaces développables n'est exigible des étudiants.
Recherche, sur des exemples, de courbes planes ou de courbes d'une surface satisfaisant à une condition différentielle.	Telles que, trajectoires orthogonales, lignes de plus grande pente, contours apparents cylindriques et coniques, etc.
Exemples de génération de surfaces, de recherche de paramétrages ou de mise en équation dans un repère adéquat (surfaces de révolution, surfaces réglées).	
§ Exemples d'étude de familles de sections planes d'une surface.	
§ Exemples de représentation d'une surface à l'aide de familles de courbes tracées sur la surface.	