Mathématiques complémentaires

Classe terminale, enseignement optionnel, voie générale

Juin 2019

Sommaire

Préambule **3**

- *Intentions majeures* 3
- *Compétences mathématiques* 3
- *Diversité de l'activité de l'élève* 4
- *Utilisation de logiciels* 4
- *Évaluation des élèves* 4
- *Place de l'oral* 5
- *Trace écrite* 5
- *Quelques lignes directrices pour l'enseignement* 5
- *Organisation du programme* 6

Thèmes d'étude **7**

- *Modèles définis par une fonction d'une variable* 7
- *Modèles d'évolution* 8
- *Approche historique de la fonction logarithme* 9
- *Calculs d'aires* 9
- *Répartition des richesses, inégalités* 10
- *Inférence bayésienne* 11
- *Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage* 12
- *Temps d'attente* 13
- *Corrélation et causalité* 14

Contenus **15**

- *Analyse* 15
- *Probabilités et statistique* 20
- *Algorithmique et programmation* 23
- *Vocabulaire ensembliste et logique* 23

Préambule

Intentions majeures

L'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires est destiné prioritairement aux élèves qui, ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en classe de première et ne souhaitant pas poursuivre cet enseignement en classe terminale, ont cependant besoin de compléter leurs connaissances et compétences mathématiques par un enseignement adapté à leur poursuite d'études dans l'enseignement supérieur, en particulier en médecine, économie ou sciences sociales.
Le programme de mathématiques complémentaires s'appuie sur le programme de spécialité de mathématiques de la classe de première qu'il réinvestit et enrichit de nouvelles connaissances et compétences mathématiques, elles-mêmes reliées à des thèmes d'étude où les notions sont mises en situation dans divers champs disciplinaires.

Compétences mathématiques

Dans le prolongement des cycles précédents, on travaille les six grandes compétences :

- **chercher**, expérimenter, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- **modéliser**, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- **représenter**, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique ...), changer de registre ;
- **raisonner**, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- **calculer**, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- **communiquer** un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. Ceux-ci facilitent en effet le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. L'installation de ces réflexes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser connaissances, méthodes et stratégies.

Les thèmes d'étude du programme proposent une approche nouvelle, avec des problèmes issus des autres disciplines ou internes aux mathématiques. Les compétences de modélisation et de communication sont particulièrement mises en valeur, mais toutes les compétences mathématiques sont mobilisées, notamment le raisonnement et la capacité à construire une démonstration.

Diversité de l’activité de l’élève

La diversité des activités mathématiques proposées doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de son rôle dans les autres disciplines. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.

Cette diversité se retrouve dans les thèmes d’étude proposés aux élèves et dans la façon de les aborder. Les travaux proposés aux élèves s’adaptent à leur choix d’enseignements de spécialité et à leur projet d’études supérieures. Ils peuvent prendre la forme de travaux écrits ou d’exposés, individuels ou en groupe. Ils développent l’autonomie et les qualités d’initiative, tout en assurant la stabilisation des connaissances et des compétences.

Utilisation de logiciels

L’utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d’outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d’expérimenter, favorise l’interaction entre l’observation et la démonstration et change profondément la nature de l’enseignement.

L’utilisation régulière de ces outils peut intervenir selon trois modalités :

- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective adapté ;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques en classe, à l’occasion de la résolution d’exercices ou de problèmes ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors du temps de classe (par exemple au CDI ou à un autre point d’accès au réseau local).

Évaluation des élèves

Les élèves sont évalués en fonction des capacités attendues et selon des modes variés : rédaction de travaux de recherche individuels ou collectifs, travaux pratiques pouvant s’appuyer sur des logiciels, activité de modélisation, exposés, réalisation et présentation d’un programme informatique, interrogations écrites ou orales, devoirs surveillés avec ou sans calculatrice.

Plus largement, l’évaluation prend en compte et valorise les compétences mathématiques et les qualités recherchées dans les thèmes d’étude : l’initiative, l’engagement dans une démarche de recherche, le travail d’équipe.

Place de l’oral

Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l’appropriation des notions mathématiques et la résolution des problèmes. Comme toutes les disciplines, les mathématiques contribuent au développement des compétences orales, notamment à travers la pratique de l’argumentation. Celle-ci conduit à préciser sa pensée et à expliciter son raisonnement de manière à convaincre. Elle permet à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu’à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve. Des situations variées se prêtent à la pratique de l’oral en mathématiques : la reformulation par l’élève d’un énoncé ou d’une démarche, les échanges interactifs lors de la construction du cours, les mises en commun après un temps de recherche, les corrections d’exercices, les travaux de groupe, les exposés individuels ou à plusieurs … L’oral mathématique mobilise à la fois le langage naturel et le langage symbolique dans ses différents registres (graphiques, formules, calcul).

Trace écrite

Disposer d’une trace de cours claire, explicite et structurée est une aide essentielle à l’apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux étapes importantes de recherche, d’appropriation individuelle ou collective, de présentation commentée, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les méthodes et les stratégies étudiées en classe. Explicitant les liens entre les différentes notions ainsi que leurs objectifs, éventuellement enrichie par des exemples ou des schémas, elle constitue pour l’élève une véritable référence vers laquelle il peut se tourner autant que de besoin. Sa consultation régulière (notamment au moment de la recherche d’exercices et de problèmes, sous la conduite du professeur ou en autonomie) favorise à la fois la mémorisation et le développement de compétences. Le professeur doit avoir le souci de la bonne qualité (mathématique et rédactionnelle) des traces écrites figurant au tableau et dans les cahiers d’élèves. En particulier, il est essentiel de bien distinguer le statut des énoncés (conjecture, définition, propriété – admise ou démontrée –, démonstration, théorème).

Quelques lignes directrices pour l’enseignement

Le professeur veille à créer dans la classe de mathématiques une atmosphère de travail favorable aux apprentissages, combinant bienveillance et exigence. Il faut développer chez chaque élève des attitudes positives à l’égard des mathématiques et sa capacité à résoudre des problèmes stimulants.

L’élève doit être incité à s’engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe, et à développer sa confiance en lui. Il cherche, essaie des pistes, prend le risque de se tromper. Il ne doit pas craindre l’erreur, car il sait qu’il peut en tirer profit grâce au professeur, qui l’aide à l’identifier, à l’analyser et la comprendre. Ce travail sur l’erreur participe à la construction de ses apprentissages.

Les problèmes proposés aux élèves peuvent être internes aux mathématiques, provenir de l'histoire des mathématiques, être issus des autres disciplines ou du monde réel ; le professeur prend cependant garde que la simple inclusion de références au monde réel ne suffit pas toujours à transformer un exercice de routine en un bon problème.

Le professeur doit veiller à établir un équilibre entre divers temps d'apprentissage :

- les temps de recherche, d'activité, de manipulation ;
- les temps de dialogue et d'échange, de verbalisation, en classe entière, en groupes, à l'occasion d'exposés ;
- les temps de cours, où le professeur expose avec précision, présente certaines démonstrations et permet aux élèves d'accéder à l'abstraction ;
- les temps où sont présentés et discutés des exemples, pour vérifier la bonne compréhension de tous les élèves ;
- la résolution de problèmes dans le cadre des thèmes d'étude ;
- les rituels et exercices d'application, afin de consolider les connaissances et les méthodes.

Organisation du programme

Le programme s'organise en deux grands volets :

- le premier volet est constitué de neuf thèmes d'étude, où les concepts mathématiques du programme sont mis en situation dans divers champs disciplinaires ;
- le second volet précise l'ensemble des contenus et capacités attendues.

L'objectif est de traiter l'ensemble des contenus et capacités attendues au travers des thèmes d'étude.

Chaque thème d'étude contient les rubriques suivantes :

- un descriptif donne les éléments généraux du thème et met en contexte les contenus mathématiques ;
- des problèmes possibles sont indiqués afin d'offrir des pistes d'entrée dans le thème. Le professeur choisit sa façon de travailler le thème d'étude en fonction des goûts des élèves, de leur choix de spécialités et de leur projet d'études supérieures ;
- les contenus mathématiques utilisés dans le thème sont identifiés. Un même contenu peut apparaître dans plusieurs thèmes.

Le professeur organise son enseignement de façon à aborder l'ensemble des thèmes. En fonction des besoins des élèves, il détermine l'ordre dans lequel les thèmes sont abordés et, pour chacun d'eux, les problèmes étudiés, sans prétendre à l'exhaustivité. À titre indicatif, le temps passé sur chaque thème d'étude varie de deux à quatre semaines.

Thèmes d'étude

■ Modèles définis par une fonction d'une variable

Descriptif

Les fonctions d'une variable réelle interviennent dans des problèmes variés, internes aux mathématiques ou issus des sciences expérimentales, économiques et sociales.

La fonction peut être donnée ou déterminée par l'élève lors d'une résolution de problème. Un équilibre est à garder entre les phases de recherche et de modélisation, et les phases de calcul. C'est l'occasion de réinvestir les connaissances des années précédentes sur les études de fonctions, notamment l'étude des variations et des extremums, et d'introduire de nouvelles notions du programme en les appliquant dans des contextes mathématiques, notamment géométriques, ou issus des autres disciplines.

Ce thème très large peut être croisé avec d'autres thèmes (fonction logarithme, répartition de richesse, calcul d'aire, modèles d'évolution). Il peut se répartir sur l'année en fonction des besoins ou de l'avancée des contenus.

Problèmes possibles

- Modèles issus de contextes géométriques (expression de distance, d'aires, de volumes en fonction d'un paramètre), physiques, biologiques, économiques (fonctions de coût, coût marginal, coût moyen).
- Études de variations, résolutions d'équation, optimisation dans des configurations géométriques, physiques, économiques, etc.

Contenus associés

- Continuité, théorème des valeurs intermédiaires.
- Fonction dérivée. Sens de variation. Extremums.
- Fonctions de référence.
- Convexité.
- Statistique à deux variables.

Exemple d'algorithme

- Résolution d'équations par balayage, par dichotomie.

Modèles d'évolution

Descriptif

Il s'agit ici de modéliser des phénomènes qui dépendent du temps, à l'aide de suites ou de fonctions d'une variable réelle.

Les suites ou fonctions considérées peuvent être données *a priori* ou être obtenues lors d'une résolution de problème : suites vérifiant une relation de récurrence, fonctions solutions d'une équation différentielle, ajustement statistique d'une série chronologique.

La mise en regard des modèles discrets et des modèles continus est un objectif important.

Ce thème très large peut être étudié au fil de l'année en fonction des besoins ou de l'avancée des contenus.

Problèmes possibles

- Évolution d'un capital, amortissement d'une dette.
- Loi de décroissance radioactive : modèle discret, modèle continu.
- Décharge, charge d'un condensateur, à partir de l'équation différentielle.
- Loi de refroidissement de Newton (modèle discret).
- Chute d'un corps dans un fluide visqueux.
- Dynamique des populations : modèle de Malthus (géométrique), modèle de Verhulst (logistique) discret $N_{t+1} = N_t + rN_t(k - N_t)$, ou continu : $y' = ay(b - y)$.
- Modèle proie prédateur discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes.

Contenus associés

- Suites récurrentes.
- Suites géométriques. Fonction exponentielle.
- Suites arithmético-géométriques. Équation différentielle $y' = ay + b$.
- Limites.

Exemples d'algorithme

- Calcul des termes d'une suite.
- Recherche de seuils.
- Méthode d'Euler.

Approche historique de la fonction logarithme

Descriptif

Il s’agit de montrer qu’un objet mathématique, ici la fonction logarithme népérien, peut être étudié selon divers points de vue. Le volet des contenus l’introduit comme fonction réciproque de la fonction exponentielle, étudiée en classe de première. Le thème décrit comment elle a été introduite historiquement, avec ses deux aspects fondamentaux : équation fonctionnelle, quadrature de l’hyperbole.

Problèmes possibles

- Le développement des besoins pratiques de calcul, notamment pour l’astronomie ou la navigation conduit à la recherche de méthodes facilitant multiplication, division, extraction de racine. Influence des tables trigonométriques.
- Lien entre suites arithmétiques et géométriques (depuis Archimède). Construction de tables d’intérêts.
- Les travaux de Neper. Le passage du discret au continu.
- Vision fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$ plus tardive.
- Quadrature de l’hyperbole, problème des sous-tangentes constantes.

Contenus associés

- Suites arithmétiques, suites géométriques.
- Fonction logarithme.
- Calcul intégral.

Exemples d’algorithme

- Algorithme de Briggs.
- Approximation de $\ln 2$ par dichotomie selon l’algorithme de Brouncker.

Calculs d’aires

Descriptif

Des calculs d’aires menés selon différentes méthodes permettent d’aboutir à l’introduction de l’intégrale d’une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ en montrant alors la puissance de calcul qu’apporte dans ce domaine la détermination des primitives. Différentes approches sont possibles : méthodes historiques d’approximation des aires, méthode des rectangles et des trapèzes pour l’aire sous une courbe, méthodes probabilistes et bien sûr le calcul intégral.

Ce thème est l'occasion de revoir les aires des figures planes usuelles : triangles, trapèzes, rectangles, carrés et disques, ainsi que l'utilisation de propriétés classiques : additivité, invariance par symétrie et translation.

Les calculs d'aires par approximations successives se prêtent tout particulièrement à la mise en œuvre d'algorithmes notamment dans le cas d'aires sous des courbes de fonctions dont on ne sait pas déterminer de primitives. Leur histoire et les différentes méthodes peuvent aussi être sources d'exposés réalisés par les élèves.

Ce thème peut s'étendre à des calculs de volumes notamment pour des solides de révolution (cylindre, cône, sphère, paraboloïde de révolution ...).

Problèmes possibles

- Quadrature de la parabole par la méthode d'Archimède.
- Quadrature de l'hyperbole par une ou deux méthodes (Brouncker, Grégoire de Saint-Vincent).
- Approximation de l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle sur [0,1] par la méthode des rectangles.
- Estimation de l'aire sous une courbe par la méthode de Monte-Carlo.
- Approximation de π et aire d'un disque.

Contenus associés

- Limites de suites.
- Intégrale d'une fonction continue et positive.
- Primitives.
- Continuité et dérivation.
- Probabilités.

Exemples d'algorithmes

- Calcul d'un terme de rang donné d'une suite.
- Recherche d'une valeur approchée de précision donnée.

Répartition des richesses, inégalités

Descriptif

L'étude de la répartition de richesses dans la population d'un pays, des salaires dans une entreprise, etc., et la comparaison des différentes répartitions sont des occasions de réinvestir des connaissances antérieures de statistique descriptive et de construire de nouveaux outils d'analyse faisant intervenir les fonctions d'une variable (notamment des fonctions de répartition) et le calcul intégral.

Problèmes possibles

- Courbe de Lorenz : sur des données réelles, présentation, définition, lecture, construction d'une ligne polygonale à partir des quantiles, interprétation. Modélisation par la courbe représentative d'une fonction continue, croissante, convexe de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et ayant 0 et 1 comme points fixes. Position par rapport à la première bissectrice.
- Indice de Gini : définition, calcul, interprétation comme mesure du degré d'inégalité d'une répartition. Comparaison de plusieurs répartitions. Évolution de l'indice sur une période.

Contenus associés

- Statistique descriptive : caractéristiques de dispersion (médiane, quartiles, déciles, rapport interdécile).
- Fonctions d'une variable.
- Convexité.
- Calcul intégral.

■ Inférence bayésienne

Descriptif

Le raisonnement bayésien est à la base de nombreux algorithmes de décision et se retrouve dans de nombreux domaines pratiques : sport, médecine, justice … où l'on doit raisonner à partir de probabilités et d'informations incomplètes. Il s'agit ici de décrire et mettre en œuvre les principes du calcul utilisant des probabilités conditionnelles et notamment la formule de Bayes pour l'inversion des conditionnements.

La question d'intérêt est représentée par un événement A de probabilité $P(A)$, dite probabilité *a priori*. L'observation d'un événement B conduit à remplacer la probabilité *a priori* $P(A)$ par la probabilité conditionnelle $P_B(A)$, dite *a posteriori*. La formule de Bayes

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

permet d'exprimer la probabilité *a posteriori* lorsque l'expression du second membre est évaluable. Elle montre la distinction essentielle entre $P_B(A)$ et $P_A(B)$. Bien comprendre cette distinction est un objectif majeur.

Problèmes possibles

- Tests binaires pour le diagnostic médical. Notion de vrais/faux positifs et négatifs, sensibilité, spécificité, valeurs prédictives positive (diagnostique) et négative, lien avec les probabilités conditionnelles. Tests de dépistage de sensibilité et de spécificité données : étude des valeurs prédictives en fonction de la proportion de malades et interprétation.

- Exemples de problèmes du type : « De quelle urne vient la boule ? ».

Contenus associés

- Probabilités conditionnelles, inversion du conditionnement, formule de Bayes.
- Étude de fonction.

Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage

Descriptif

Ce thème vise à illustrer le modèle probabiliste de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes et de l'échantillonnage ainsi que ses applications à l'inférence statistique, où il s'agit, à partir de l'observation d'un échantillon, d'induire des propriétés de la population dont il est issu.

Le schéma de Bernoulli et la loi binomiale forment un cas fondamental, où il s'agit de considérer d'une part des probabilités ou proportions théoriques, et d'autre part des fréquences observées.

La réalisation de simulations est indispensable. C'est l'occasion de montrer l'intérêt de la loi uniforme sur $[0,1]$ pour simuler d'autres lois parmi lesquelles les lois uniformes discrètes et les lois binomiales.

Problèmes possibles

- Tirages aléatoires avec remise d'une boule dans une urne contenant des boules de deux couleurs différentes. Simulations. Calculs de probabilité.
- Test d'une pièce, par construction d'un intervalle I centré en $n/2$ tel que $P(X \in I) \geq 1-\alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$.
- Surréservation. Construction d'un intervalle I de la forme $[0,k]$ tel que $P(X \in I) \geq 1-\alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
- Sondages par échantillonnage aléatoire simple. Fourchette de sondage. Réflexion sur la réalisation effective d'un sondage et les biais possibles (représentativité, sincérité des réponses, etc.).
- Démarche des tests d'hypothèse et de l'estimation. Les observations étant vues comme un échantillon aléatoire d'expériences régies par une loi inconnue (à découvrir), il s'agit de confronter une modélisation théorique proposée avec les résultats mesurés. Une bonne adéquation peut permettre de valider *a priori* le modèle (avec un certain degré de confiance), tandis que l'observation d'évènements donnés avec une probabilité très faible dans le modèle peut conduire à rejeter le modèle et à en chercher un autre.

Contenus associés

- Épreuve et loi de Bernoulli.
- Schéma de Bernoulli et loi binomiale.
- Lois uniformes discrètes et continues sur [0,1].

Exemples d'algorithme

- Dans le cadre de la loi binomiale : calcul de coefficients binomiaux (triangle de Pascal), de probabilités ; détermination d'un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1-\alpha$.
- Simulation avec Python d'une variable aléatoire (de la loi de Bernoulli, d'une loi uniforme discrète, etc.) d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire. Fonction Python renvoyant une moyenne pour un échantillon. Série des moyennes pour N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ. Calcul de l'écart type s de la série des moyennes des échantillons observés, à comparer à $\sigma/\sqrt{n}$. Calcul de la proportion des cas où l'écart entre m et μ est inférieur ou égal à $k\sigma/\sqrt{n}$ ou à ks, pour $k=2$ ou $k=3$.

■ Temps d'attente

Descriptif

Certains phénomènes physiques (temps de désintégration d'un atome radioactif) ou biologiques (durée de vie de certains organismes) possèdent la propriété d'absence de mémoire. Leur modélisation mathématique repose sur l'utilisation des lois géométriques et exponentielles selon que le temps est considéré comme discret ou continu. La loi géométrique est vue soit comme la distribution du premier succès dans un schéma de Bernoulli, soit comme une loi discrète possédant la propriété d'absence de mémoire. La loi exponentielle peut être introduite à partir de la propriété d'absence de mémoire.

Problèmes possibles

- Durée de vie d'un atome radioactif. Discrétisation d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.
- Exemples de modélisation par une variable aléatoire suivant une loi géométrique ou exponentielle : durée entre deux appels téléphoniques, durée de vie d'un composant électronique, période de retour de crue, etc.
- Utilisation de la loi uniforme. Temps d'attente à un arrêt de bus, paradoxe de l'inspection.

Contenus associés

- Lois à densité.
- Loi géométrique, loi exponentielle.
- Absence de mémoire, discrète ou continue.

Exemples d'algorithme

- Simulation d'une variable aléatoire de loi géométrique à partir du schéma de Bernoulli.
- Simulation d'une loi exponentielle à partir d'une loi uniforme.
- Demi-vie d'un échantillon de grande taille d'atomes radioactifs.

Corrélation et causalité

Descriptif

À travers l'étude de séries statistiques à deux variables, l'objectif de ce thème est d'amener l'élève à évaluer une corrélation entre deux phénomènes, à développer une réflexion critique sur le lien entre deux phénomènes corrélés, et finalement à distinguer corrélation et causalité.

C'est aussi l'occasion de travailler sur la droite de régression, et de faire percevoir le sens de l'expression « moindres carrés ». Des ajustements affines ou s'y ramenant à l'aide d'un changement de variable permettent des interpolations et des extrapolations, sur lesquelles l'élève porte un regard critique.

Ce thème d'étude a d'innombrables applications en sciences expérimentales ou en sciences sociales. La corrélation entre deux variables peut être une première approche vers une loi déterministe ou non. Quand une des variables est le temps, le problème de l'extrapolation prend souvent une importance particulière, comme le montre l'exemple du changement climatique.

Problèmes possibles

- Établissement de la loi d'Ohm.
- Loi de désintégration radioactive.
- Évolution de la température et des émissions de gaz à effet de serre dans le cadre du réchauffement climatique.
- Loi de Moore.

Contenus associés

- Fonctions usuelles.
- Représentations graphiques.
- Minimum d'une fonction trinôme.
- Séries statistiques à deux variables.

Contenus

Analyse

Objectifs

L’objectif du programme d’analyse est de permettre à l’élève de consolider et d’enrichir ses connaissances et compétences sur les suites et les fonctions, afin de le rendre capable de modéliser et d’étudier une grande diversité de phénomènes discrets et continus.

À la fois pour les suites et les fonctions, la notion de limite est un objectif important, qui fait l’objet d’une approche intuitive. Les suites géométriques, et plus généralement arithmético-géométriques, sont étudiées spécifiquement.

Pour les fonctions, les objectifs sont les suivants :

- introduire la notion de continuité en liaison avec le théorème des valeurs intermédiaires ;
- consolider et étendre le travail sur la dérivation et sur les fonctions usuelles, enrichies du logarithme ;
- faire une première approche des équations différentielles, avec la notion de primitive et la résolution de l’équation différentielle $y' = ay + b$;
- étudier les fonctions convexes, pour réinvestir et consolider le travail sur la dérivation mené en classe de première ;
- introduire la notion d’intégration de fonctions.

Ces contenus sont mis en contexte dans les thèmes d’étude, ce qui permet aux élèves d’enrichir leurs activités de modélisation et de développer leurs connaissances et compétences mathématiques.

Histoire des mathématiques

Le programme d'analyse est construit autour des notions suivantes : suites, fonctions usuelles, limite et continuité, dérivation, intégration. Le développement de ces notions a été complexe et il peut être l’occasion d’études historiques ou épistémologiques intéressantes.

Le calcul infinitésimal, qui contient les fonctions usuelles, le calcul différentiel et intégral ont historiquement précédé la notion de limite qui en donnera des fondements rigoureux. Le thème dont les origines sont les plus anciennes est le calcul intégral. On peut en trouver des prémisses chez Archimède (longueur du cercle, quadrature de la parabole, etc.), Liu Hui ou encore Cavalieri.

L’étude des procédés par lesquels les mathématiciens ont construit et tabulé le logarithme illustre les liens entre discret et continu et fournit une source féconde d'activités. Le lien avec des problèmes de quadrature ou celui des tangentes est également possible.

Le calcul différentiel est une création du XVII^{e} siècle où il s'est développé de concert avec la physique mathématique. En dépit de la fragilité des fondations, l'efficacité du calcul infinitésimal et la variété de ses applications en ont imposé l'usage. Au-delà de la célèbre querelle, l'évocation des noms de Newton et Leibniz permet de faire voir deux visions et deux pratiques différentes du calcul infinitésimal.

Parallèlement, les résolutions d'équations différentielles, provenant de la mécanique ou des mathématiques elles-mêmes, se structurent notamment en lien avec les séries (Newton, Euler, D'Alembert, Lagrange, Cauchy, Clairaut, Riccati) et illustrent là encore le lien entre le discret et le continu.

Suites numériques, modèles discrets

Contenus

- Approche intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite, des opérations sur les limites, du passage à la limite dans les inégalités et du théorème des gendarmes.
- Limite d'une suite géométrique de raison positive.
- Limite de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1.
- Suites arithmético-géométriques.

Capacités attendues

- Modéliser un problème par une suite donnée par une formule explicite ou une relation de récurrence.
- Calculer une limite de suite géométrique, de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1.
- Représenter graphiquement une suite donnée par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue d'un intervalle I dans lui-même. Conjecturer le comportement global ou asymptotique d'une telle suite.
- Pour une récurrence arithmético-géométrique : recherche d'une suite constante solution particulière ; utilisation de cette suite pour déterminer toutes les solutions.

Démonstration possible

- Limite des sommes des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1.

Exemples d'algorithme

- Recherche de seuils.
- Pour une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, calcul des termes successifs.
- Recherche de valeurs approchées de constantes mathématiques, par exemple π, $\ln 2$, $\sqrt{2}$.

Fonctions : continuité, dérivabilité, limites, représentation graphique

On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue. Les études de fonctions peuvent se faire sur des intervalles quelconques, avec une notion intuitive de limite aux bornes de l'intervalle. La formalisation de la notion de limite n'est pas un attendu du programme. Les opérations sur les limites sont admises. Au besoin, l'utilisation du théorème de composition des limites et des théorèmes de comparaison se fait en contexte.

La notion de fonction réciproque ne donne pas lieu à des développements théoriques, mais est illustrée par les fonctions carré, racine carrée, exponentielle, logarithme.

Contenus

- Notion de limite. Lien avec la continuité et les asymptotes horizontales ou verticales. Limites des fonctions de référence (carré, cube, racine carrée, inverse, exponentielle, logarithme).
- Théorème des valeurs intermédiaires (admis). Cas des fonctions strictement monotones.
- Réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle, représentation graphique.
- Fonction logarithme népérien : réciproque de la fonction exponentielle. Limites, représentation graphique. Équation fonctionnelle. Fonction dérivée.
- Fonction dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$, $x \mapsto \ln u(x)$, $x \mapsto u(x)^2$.

Capacités attendues

- Calculer une fonction dérivée, calculer des limites. Dresser un tableau de variation.
- Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser le calcul des limites, l'allure des courbes représentatives des fonctions inverse, carré, cube, racine carrée, exponentielle et logarithme.
- Exploiter le tableau de variation pour déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$, pour résoudre une inéquation du type $f(x) \leq k$.
- Déterminer des valeurs approchées, un encadrement d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$.
- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Utiliser la relation $\ln q^n = n \ln q$, pour déterminer un seuil.

Démonstrations possibles

- Relations $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.
- Calcul de la fonction dérivée du logarithme, en admettant sa dérivabilité.
- Calcul de la fonction dérivée de $\ln u$, de $\exp u$.

Exemples d'algorithme

- Méthodes de recherche de valeurs approchées d'une solution d'équation du type $f(x) = k$: balayage, dichotomie, méthode de Newton.
- Algorithme de Briggs pour le calcul de logarithmes.

Primitives et équations différentielles

Le programme se limite à la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants. Sur les exemples, on met en évidence l'existence et l'unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée.

Des équations différentielles non linéaires peuvent apparaître, par exemple l'équation logistique dans le cadre des thèmes d'étude, mais aucune connaissance spécifique à ce sujet n'est exigible.

Contenus

- Sur des exemples, notion d'une solution d'équation différentielle.
- Notion de primitive, en liaison avec l'équation différentielle $y' = f$. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante. Exemples.
- Équation différentielle $y' = ay + b$, où a et b sont des réels ; allure des courbes.

Capacités attendues

- Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
- Déterminer les primitives d'une fonction, en reconnaissant la dérivée d'une fonction de référence ou une fonction de la forme $2uu'$, $\mathrm{e}^{u}u'$, ou u'/u.
- Résoudre une équation différentielle $y' = ay$. Pour une équation différentielle $y' = ay + b$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer la solution générale.

Démonstrations possibles

- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Exemple d'algorithme

- Sur des exemples, résolution approchée d'une équation différentielle par la méthode d'Euler.

Fonctions convexes

Contenus

- Dérivée seconde d'une fonction.
- Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes, équivalence admise, lorsque f est dérivable, avec la position par rapport aux tangentes.
- Caractérisation admise par la croissance de f', la positivité de f''.
- Point d'inflexion.

Capacités attendues

- Reconnaître sur une représentation graphique une fonction convexe, concave, un point d'inflexion.
- Étudier la convexité, la concavité, d'une fonction deux fois dérivable sur un intervalle.

Intégration

On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie. On met en relation les écritures $\int_a^b f(x)\ dx$ et $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$.

Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x)dx$. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a, b]$. Approche graphique et numérique. La valeur moyenne est comprise entre les bornes de la fonction.
- Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles.
- Présentation de l'intégrale des fonctions continues de signe quelconque.
- Théorème : si f est continue sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f.
- Calcul d'intégrales à l'aide de primitives : si F est une primitive de f, alors
$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Capacités attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer l'aire sous une courbe ou entre deux courbes.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Démonstration possible

- Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ lorsque f est une fonction continue positive croissante.

Exemples d'algorithme

- Méthode des rectangles, des trapèzes.
- Méthode de Monte-Carlo pour un calcul d'aire.

Probabilités et statistique

Histoire des mathématiques

La parution de l'*Ars Conjectandi* de Jacques Bernoulli (1713) marque une rupture dans l'histoire des probabilités. On y trouve la première étude de la distribution binomiale, introduite dans le cadre d'un tirage sans remise pour un modèle d'urne. Le résultat majeur de cet ouvrage est la loi des grands nombres de Bernoulli, qui relie fréquences et probabilité, et valide le principe de l'échantillonnage. Il constitue le premier exemple de « théorème limite » en théorie des probabilités. Bayes puis Laplace théorisent un peu plus tard les problèmes de probabilités inverses.

Au XVIII^{e} siècle, sous l'influence d'hommes politiques et d'économistes, les publications de données sur la démographie, les maladies, les impôts, etc., se multiplient considérablement, consacrant la naissance de la statistique en tant qu'instrument mathématique d'observation sociale. Avec Bayes, on assiste aux débuts de la statistique inférentielle.

Au début du XIX^{e} siècle, la modélisation des erreurs de mesure va devenir centrale pour faire de la statistique une science à part entière. Lagrange et Laplace développent une approche probabiliste de la théorie des erreurs. Gauss (1809, 1821), après Legendre (1805), imagine une méthode des moindres carrés qu'il applique avec succès à la prédiction de la position d'un astéroïde. Il y propose de comprendre l'écart-type comme une « erreur moyenne à craindre ».

L'introduction de méthodes statistiques en sociologie est l'œuvre du mathématicien et astronome belge Quételet dans les années 1830. Il réfléchit à la distribution de données autour de la moyenne, ce qui sera approfondi notamment par l'Anglais Galton. De son côté, Pearson s'intéresse à la corrélation entre variables quantitatives, à la base de la régression linéaire. Au XX^{e} siècle, Student et Fisher développent la biométrie et précisent la différence entre le domaine des probabilités et celui d'une statistique devenue mathématique.
Aujourd'hui, les statistiques jouent un rôle essentiel dans les algorithmes de l'intelligence artificielle et de l'apprentissage machine.

Lois discrètes

Contenus

- Loi uniforme sur $\{1,2, \dots, n\}$. Espérance.
- Épreuve de Bernoulli. Loi de Bernoulli : définition, espérance et écart type.
- Schéma de Bernoulli. Représentation par un arbre.
- Coefficients binomiaux : définition (nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille n), triangle de Pascal, symétrie.
- Variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Interprétation : nombre de succès dans le schéma de Bernoulli. Expression, espérance et écart type (admis). Représentation graphique.
- Loi géométrique : définition, expression, espérance (admise), représentation graphique et propriété caractéristique (loi sans mémoire).

Capacités attendues

- Identifier des situations où une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli, une loi binomiale ou une loi géométrique.
- Déterminer des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal.
- Dans le cas où X suit une loi binomiale, calculer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, les probabilités des événements de type $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$ etc. Calculer explicitement ces probabilités pour une variable aléatoire suivant une loi géométrique.
- Dans le cas où X suit une loi binomiale, déterminer un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1 - \alpha$.
- Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser l'espérance des lois précédentes.
- Utiliser en situation la caractérisation d'une loi géométrique par l'absence de mémoire.
- Calculer des probabilités dans des situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles, des répétitions d'expériences aléatoires.

Démonstrations possibles

- Espérance et écart type d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli.
- Espérance d'une variable aléatoire uniforme sur $\{1,2, \dots, n\}$.
- Espérance d'une variable aléatoire suivant une binomiale ($n \leq 3$).
- Caractérisation d'une loi géométrique par l'absence de mémoire.

Lois à densité

Contenus

- Notion de loi à densité à partir d'exemples. Représentation d'une probabilité comme une aire. Fonction de répartition $x \mapsto P(X \leq x)$.
- Espérance et variance d'une loi à densité, expressions sous forme d'intégrales.

- Loi uniforme sur $[0,1]$ puis sur $[a, b]$. Fonction de densité, fonction de répartition. Espérance et variance.
- Loi exponentielle. Fonction densité, fonction de répartition. Espérance, propriété d'absence de mémoire.

Capacités attendues

- Déterminer si une fonction est une densité de probabilité. Calculer des probabilités.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité.

Exemples d'algorithme

- Simulation d'une variable de Bernoulli ou d'un lancer de dé (ou d'une variable uniforme sur un ensemble fini) à partir d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.
- Simulation du comportement de la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Statistique à deux variables quantitatives

L'étude de séries statistiques à deux variables permet de conjecturer des relations, affines ou exponentielles par exemple, entre deux quantités physiques, biologiques ou autres. Elle apparaît ainsi naturellement dans plusieurs thèmes d'étude. Elle s'appuie notamment sur les études de fonctions classiques et les représentations graphiques.

Contenus

- Nuage de points. Point moyen.
- Ajustement affine. Droite des moindres carrés. Coefficient de corrélation.
- Ajustement se ramenant par changement de variable à un ajustement affine.
- Application des ajustements à des interpolations ou extrapolations.

Capacités

- Représenter un nuage de points.
- Calculer les coordonnées d'un point moyen.
- Déterminer une droite de régression, à l'aide de la calculatrice, d'un logiciel ou par calcul.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler.

Démonstration possible

- Droite des moindres carrés.

Algorithmique et programmation

La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, en mathématiques et en technologie, les élèves ont appris à écrire, mettre au point et exécuter un programme simple. Les classes de seconde et de première ont permis de consolider les acquis du collège (notion de variable, type, de variables, affectation, instruction conditionnelle, boucle notamment), d'introduire et d'utiliser la notion de fonction informatique et de liste. En algorithmique et programmation, le programme de mathématiques complémentaires reprend les programmes des classes de seconde et de première sans introduire de notion nouvelle, afin de consolider le travail des classes précédentes.

Les algorithmes peuvent être écrits en langage naturel ou utiliser le langage Python. On utilise le symbole « ← » pour désigner l'affection dans un algorithme écrit en langage naturel. L'accent est mis sur la programmation modulaire qui permet de découper une tâche complexe en tâches plus simples.

L'algorithmique trouve naturellement sa place dans toutes les parties du programme et aide à la compréhension et à la construction des notions mathématiques.

Vocabulaire ensembliste et logique

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation.

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils connaissent également la notion de couple.

Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E, on utilise la notation des probabilités $\bar{A}$, ou la notation $E \setminus A$.

Les élèves apprennent en situation à :

- reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication ;

- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles).

Le symbole de somme Σ est utilisé pour écrire concisément certaines expressions, mais son emploi comme outil de calcul n'est pas un objectif du programme.