CONSEIL SUPÉRIEUR DES PROGRAMMES

Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C 2, C3 et C4

Jean-Paul Fischer,

Professeur d'université,
Université de Lorraine

À propos du calcul : réponses (très partielles) aux questions du CSP

octobre 14

À propos du calcul :
Réponses (très partielles) aux questions du CSP

1) Quelles connaissances ou compétences en mathématiques peuvent être attendues de tous les élèves en fin de Cycle 2 ? En fin de Cycle 3 ? Avec quels niveaux de maîtrise au cours de chaque cycle ? A quels moments de la scolarité situez-vous des paliers dans les apprentissages ? Pouvez-vous caractériser ces paliers ?

Je me méfie beaucoup, au moins en calcul, de ces notions de paliers, de compétences acquises, etc. car la mémoire est un processus dynamique. Elles induisent chez les enseignants l'idée que les connaissances sont acquises. Quand je testais la connaissance des faits numériques élémentaires (pour les quatre opérations), les enseignants étaient toujours étonnés de voir qu'au CM ce sont des faits additifs (compléments à 10) qui progressent le plus (en vitesse) et que les élèves ne connaissent quasiment pas des faits comme 9+7 = 16. Combien de fois ai-je entendu : « Je croyais que c'était acquis au CE ».

2) Pourriez-vous nous faire part de votre position à propos des éléments avancés dans la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques qui s'est tenue récemment ? *http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale*

Je fais très brièvement allusion dans les réponses à 3) et 4) aux interventions de C. Chambris, M. Artigue et Y. Chevallard. Je pense que l'intervention de S. Dehaene doit être appréhendée en gardant à l'esprit qu'il s'agit de sciences cognitives innéistes. La différence avec la psychologie piagétienne est fondamentale : en science cognitive innéiste, on admet – et Dehaene répète ce critère dans son intervention – que les enfants ou les bébés savent faire quelque chose s'ils font (collectivement) mieux que le hasard (50% en général). Pour dire que l'enfant réussit ou sait, Piaget (et d'autres) utilisait le critère extérieur de 75% d'enfants qui réussissent, un critère déjà « délicat » en pédagogie car 25% d'échecs sont inadmissibles. Mais ce problème est considérablement amplifié par les évaluations binaires (où l'on a une chance sur 2 de réussir au hasard) souvent utilisées. Par exemple, si vous demandez à un nombre suffisamment grand d'enfants de 3 ans de dire si 4+3 = 7 (Vrai ou Pas Vrai) et que 1% d'entre eux savent que c'est Vrai, les 99% autres répondant au hasard, vous trouverez que les enfants de 3 ans font significativement mieux que le hasard, i.e. savent que 4+3 = 7 d'après un critère innéiste, alors que 99% d'entre eux n'en savent strictement rien !

3) Quels sont selon vous les points positifs et négatifs que vous voyez dans les programmes de 2002 ? Dans ceux de 2008 ?

Dans les programmes 2002, on précisait que seule la technique opératoire de l'addition (posée en colonnes) est exigée à la fin du cycle 2. Alors que l'évolution de la société aurait pu laisser croire que l'enseignement des techniques opératoires allait régresser dans les programmes 2008, ces derniers semblent plus exigeants, puisqu'ils demandent :

- Au CP : Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celle de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100).

- Au CE1 : Connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre.

Je pense que l'enseignement précoce des techniques opératoires (posées) a des conséquences négatives sur la qualité du calcul mental. Il induit en effet, en calcul mental, la visualisation des techniques opératoires écrites, en particulier chez les filles[1]. Pour les opérations additives en tout cas, il transforme aussi le calcul en ligne en une simple adaptation de la technique opératoire posée en colonnes.

Dans les programmes 2002, on essayait de préciser la connaissance des faits numériques élémentaires : ainsi, on distingue la mémorisation des résultats, le calcul automatisé et le calcul réfléchi. On précise aussi reconstruire « rapidement » ou « très rapidement ». Toutes ces expressions ne sont pas complètement satisfaisantes :

- Mémoriser des résultats renvoie clairement à une conception unidirectionnelle de l'égalité, où l'on a deux données a et b au départ et on trouve un résultat c à l'arrivée. Ce n'est évidemment pas le seul résultat c qu'il faudrait mémoriser mais l'association entre a, b et c pour l'opération donnée, ce que je désigne par l'unité cognitive {+,a,b,c} pour les opérations additives (addition et soustraction).

- L'objectif de « reconstruire très rapidement » pour les résultats des tables d'addition et « trouver rapidement » pour les compléments à la dizaine supérieure renvoie à la même conception unidirectionnelle de l'égalité. Cela me paraît insuffisant pour une partie des faits additifs : les compléments à 10 et les décompositions additives des nombres inférieurs à 10. Un élève n'utilisera pas le détour par 10, pour calculer 7+5 par exemple, s'il ne sait pas que 7+5 dépasse 10, si « + » et « 7 » n'activent pas l'unité {+, 7, 3,10} et, ensuite, si « + », « 3 » et « 5 » n'activent pas l'unité {+, 2, 3,5}. Ce qu'il lui faudrait, c'est avoir préalablement consolidé ces unités en mémoire déclarative, ce qui lui permettrait de savoir que 10 c'est 7+3 et que 5 c'est 3+2 (aussi que 5+5 c'est 10 et que 7+5 est plus grand que 5+5).

Dans les programmes 2008, on utilise fondamentalement la notion d'automatisation. Cette notion est ambiguë. Qu'est-ce qui doit être automatique en calcul: la récupération de la réponse en mémoire déclarative ou l'activation d'une procédure qui permet de la reconstruire ? Les anciens pédagogues utilisaient l'expression « savoir par cœur », une expression moins ambiguë car elle exige la récupération automatique ou très rapide en mémoire déclarative ; ils incitaient à apprendre par cœur les faits que l'on ne peut pas aisément reconstruire par une procédure, par exemple 7 x 7 ou, beaucoup plus convaincant, 49 : 7. La notion d'automatisation devrait être subsumée sous la distinction entre « savoir que » (e.g., savoir que 7x7 c'est 49) et « savoir comment faire » (e.g., additionner 7 six fois à lui-même). La récupération en mémoire déclarative n'est pas nécessairement automatique comme le montrent les mots qui sont sur le bout de la langue, alors que nous les cherchons intensément. Dans l'une de mes observations, une fille de CM2 qui ne connaissait plus un produit élémentaire a spontanément commenté : « Je le sais par cœur, mais il faut que je trouve ». Les procédures de calcul étant nombreuses, ce n'est pas tellement l'exécution des procédures qui doit être automatisée mais plutôt le choix de la procédure : au CE1 les élèves pourraient s'orienter vers un calcul de 19-2 en reculant de 2 et vers un calcul de 19-17 en avançant de 2, mais ce choix devrait préalablement et automatiquement être « écarté » par un autre s'ils sont en présence du calcul de 19-2+2 ou de 19-17+17. Si l'exécution de la

[1] cf. Fischer J.-P., 2004. Les différences cognitives entre sexes : une autre approche et d'autres observations. *Pratiques psychologiques*, 10(4), 401-413.

procédure de comptage arrière était alors automatiquement activée par 19-2, ils trouveraient 18, **17** et recalculeront 18, **19.**

Cela peut paraître un moindre mal, mais en algèbre le calcul de x+2-2 les conduira à un blocage : en voulant calculer x+2, ils trouveront x+1, **x+2**, et donc x+2-2 !

La connaissance par cœur, ou déclarative, me paraît aussi une étape conceptuelle dans la compréhension du nombre. M. Artigue (dans sa contribution à la CNEM) explique que 7x8 peut d'abord être calculé par une procédure (s'appuyer 8x8 = 64 et retrancher 4 et encore 4), puis sera connu par cœur et, ensuite, possiblement oublié (d'où l'intérêt de pouvoir recourir à une procédure). A cela je voudrais ajouter que la connaissance déclarative de 7x8=56, ou d'une unité déclarative comme {x, 7, 8,56}, me paraît essentielle pour découvrir, comprendre et savoir que 56 : 7 c'est 8. Chez la grande majorité des jeunes adultes l'activation d'une telle unité est loin d'être automatique. Par exemple, aux Journées de Défense Citoyenne[2], j'ai pu vérifier que la majorité des jeunes adultes répond que **54** (cm) **divisé par 6 n'est pas égal à 9** (cm), avec un choix de réponse binaire. Cela (1) montre que l'unité {x, 6, 9,54} n'est pas activée chez ces jeunes adultes[3], et (2) suggère qu'ils recourent à une fausse croyance, à savoir que la division de deux nombres pairs ne peut donner un nombre impair. Une telle méconnaissance semble soulever un problème pédagogique majeur : quel est l'intérêt d'enseigner une connaissance (déclarative) que les personnes oublient ensuite ? En fait, ce problème disparaît, ou est au moins amoindri, si l'on considère, comme je viens de le suggérer, que la connaissance déclarative constitue aussi une étape vers le concept de division qui, lui, est beaucoup plus résistant à l'épreuve du temps.

En outre :

- Elle pourra être réutilisée, donc réactivée, en calcul algébrique, par exemple pour factoriser $x^2 - 49$ ou $x^2 - 15x + 56$.

- Chez une partie des personnes cette mémoire déclarative survivra, notamment parce qu'elle sera réactivée dans leurs études, leur travail professionnel (y compris l'éducation de leurs enfants) ou dans leurs loisirs.

- Les spécialistes de la mémoire savent que la connaissance « oubliée » sera plus facile à réapprendre car elle n'est pas totalement effacée en mémoire.

En conclusion, l'utilisation de la notion d'automatisation, ou aussi de mémoire, sans précision de ce qui doit être automatisé ou mémorisé, et comment, me paraît une régression pédagogique par rapport à l'utilisation ancienne de « savoir par cœur »[4].

Un autre point des programmes 2008 qui a attiré mon attention concerne la table de multiplication par 2. Les programmes demandent de la « connaître » au CP et de la « mémoriser » au CE1. Cette juxtaposition (physique dans le B.O.) laisse sous-entendre que « connaître » est moins exigeant que « mémoriser ». L'utilisation du mot « table » semble alors venir contredire le sous-entendu et, par ailleurs, induit une forme de mémorisation datée

[2] cf. Fischer J.-P., 2012. Que sont nos tables devenues ? *Psychologie & Éducation*, n° 4, 97-109.
[3] Chez certaines personnalités non plus comme le souligne nommément Y. Chevallard dans son introduction à la table ronde de la CNEM.
[4] J'ai vérifié que cette expression ne figure pas dans les programmes ou progressions 2008.

et connotée. Ce que l'on peut demander, en continuité avec la mémorisation déclarative des doubles, c'est une mémorisation orale fondamentalement additive des produits par 2 : deux fois six, c'est le double de six, à savoir douze.

Cette mémorisation s'appuie sur l'unité {+, 6, 6,12} en mémoire déclarative. Au CE1, la mémorisation déclarative des produits par 2 doit conduire à la formation de l'unité {x, 6, 2,12}.

Dans le 4) suivant je propose des représentations schématiques différentes pour ces deux types de connaissance relevant l'un des structures additives, et l'autre des structures multiplicatives. Cette distinction est importante car les structures multiplicatives relèvent d'une abstraction réfléchissante qui pourrait ne pas être à la portée de certains enfants de CP (Piaget parlait de « myopie » à l'égard des structures multiplicatives jusque vers 6 ou 7 ans)[5].

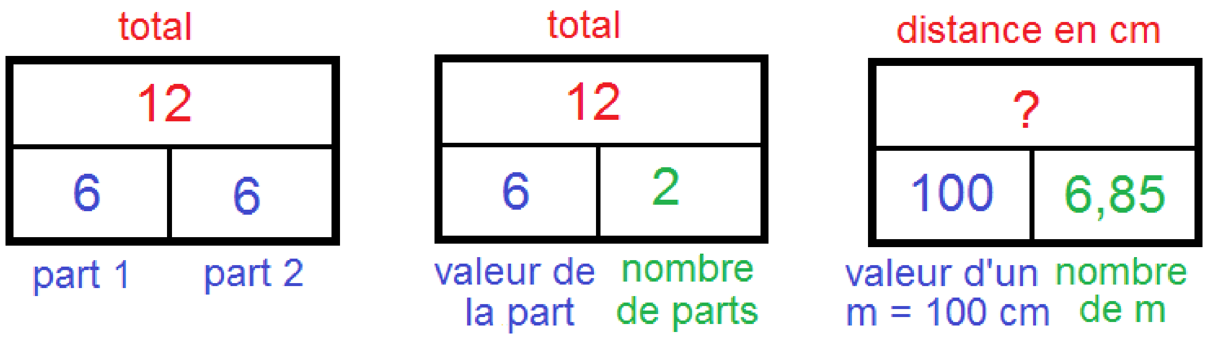
4) Pourriez-vous décrire explicitement et concrètement quelques situations exemplaires, qu'il serait possible de relier aux contenus essentiels proposés dans les programmes ?

Je ne connais pas de situation exemplaire adaptée aux contenus essentiels des programmes. Si la question porte sur une situation exemplaire que l'on peut relier à un contenu essentiel, je peux en trouver de nombreuses. Par exemple, l'équilibrage d'une balance (Roberval) pour la compréhension de l'addition à trou : a + __ = c.

J'en profite pour insister sur une représentation schématique qui, elle, me paraît adaptée aux contenus essentiels des programmes. Il s'agit d'une schématisation que j'ai un peu développée dans un de mes articles[6] à partir des réflexions de S. Ehrlich (in : *Sémantique et mathématique: Apprendre/Enseigner l'arithmétique simple.* Paris: Nathan, 1990). Pour montrer qu'elle est adaptée à de nombreux contenus essentiels, je l'illustre ci-après avec trois exemples : les deux premiers – une représentation des faits additif 6+6 = 12 et multiplicatif 6x2 = 12 – ont aussi pour but de différencier l'apprentissage de la « table de multiplication de 2 » en CP et en CE1 dont j'ai parlé précédemment; le troisième répond à la demande de C. Chambris (dans sa contribution à la CNEM) de ne pas négliger l'enseignement de connaissances comme 1 m = 100 cm et les conversions qui en résultent (ici le saut en longueur victorieux d'Eloyse Lesueur championnat d'Europe 2014 à convertir en centimètres).

[5] in : *Recherches sur l'abstraction réfléchissante: 1/L'abstraction des relations logico-arithmétiques.* Paris: PUF, 1977.

[6] cf. La résolution des problèmes arithmétiques verbaux: propositions pour un enseignement pro-actif [in R. Duval (Ed), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*: vol. 5 (pp.177-210), 1993. Strasbourg: IREM].



Ce mode de représentation a l'avantage de représenter en même temps l'opération inverse. Pour les opérations additives : le total moins la part1 donne la part 2 et le total moins la part2 donne la part 1 ; pour les opérations multiplicatives, le total divisé par le nombre de parts donne la valeur d'une part (division partitive), et le total divisé par la valeur d'une part donne le nombre de parts (division quotitive). J'ai vu de nombreuses classes de CM où l'on affichait trois formules, notamment pour relier la distance parcourue, la vitesse et le temps mis pour effectuer le parcours : distance = vitesse x temps ; vitesse = distance : temps ; temps = distance : vitesse. Les trois relations sont résumées ici par un schéma unique.

La schématisation est directement adaptée à la résolution de problèmes arithmétiques verbaux dont elle est issue. C'est même, au bout de 40 ans de réflexion, la seule méthode que je connaisse et qui permette de trouver automatiquement l'opération arithmétique (même lorsque l'opérateur sémantique s'oppose à l'opérateur arithmétique). Et, dans l'optique d'un calcul instrumenté, trouver l'opération arithmétique est essentiel.

5) Quels sont les liens possibles avec les autres disciplines dans le cadre du projet de socle commun de connaissances, de compétences et de culture ?

http://cache.media.education.gouv.fr/file/06_Juin/38/8/CSP_Socle_commun_de_connaissances_competences_culture_328388.pdf (Vous pouvez là aussi illustrer votre propos à travers une ou deux situations qui vous paraîtraient particulièrement pertinentes).

6) Auriez-vous des recommandations à faire sur la forme et l'écriture des futurs programmes ?

Lorsque l'on parle de connaissance, de mémorisation ou d'automatisation, essayer de lever les ambiguïtés que j'ai soulignées. L'expression « savoir que » semble compréhensible par tous. Connaître les additions élémentaires a+b, qui ne dépassent pas 10, en termes de « savoir que » signifie, par exemple, savoir à la fois que 5 et 2 c'est 7, et que 7 c'est (ou peut-être) 2 et 5. Mais on peut aussi espérer qu'une formulation en termes de connaissance déclarative, ou avec des notations d'unités cognitives, n'est pas inaccessible à des professeurs des écoles à Bac+4 ou 5.

Comme je l'ai suggéré, la disparition inéluctable de l'entraînement systématique et intense aux techniques opératoires (posées, en colonnes) a pour conséquence la disparition de ce que je considère comme la principale source d'apprentissage déclaratif des tables élémentaires, notamment la table d'addition qui est omniprésente dans toutes les techniques. Par exemple dans une multiplication posée de deux nombres à deux chiffres comme 83 x 46, un élève aura 5 additions (essentiellement élémentaires) à réactiver ou à calculer. Et si un élève calcule les produits élémentaires par addition répétée, fût-ce intelligemment (i.e., par addition répétée du plus grand des deux nombres à multiplier), il aura 12 additions (pas toujours élémentaires) supplémentaires à réactiver ou calculer ; au final, il aura calculé 17 additions et aucune multiplication élémentaire ! En outre, dans les calculs écrits plus complexes, la position des chiffres à respecter, le calcul à exécuter de droite à gauche, la retenue à gérer, occupent en partie la mémoire de travail et, de ce fait, incitent l'élève à récupérer les faits élémentaires en mémoire déclarative. Les techniques opératoires posées, pratiquées intensivement, étaient donc une bonne façon d'inciter les élèves à retenir par cœur les faits élémentaires. En revanche, si l'on se contente de demander par exemple 5+3, une partie d'entre eux continuera à dire discrètement 6, 7, et fortement **8** ; cela est suffisant pour répondre (rapidement) à la question, mais totalement insuffisant pour savoir que 8-3 c'est 5, que 8-5 c'est 3, et pour faire un passage de dizaine (e.g. 17+8 = 17+3+5).

Pour compenser l'impact que la moindre pratique des techniques opératoires aura sur la connaissance des tables élémentaires, il faudrait pratiquer massivement du calcul mental. Pédagogiquement, cela risque d'être rébarbatif. Donc il serait bon de mentionner des apprentissages variés et importants, à ma connaissance rarement explicités dans les programmes, comme des procédures d'addition et de soustraction des nombres dont l'écriture se termine par 1 (11 pour commencer), par 9 (9 pour commencer), des heuristiques comme l'addition de deux nombres espacés de 2 (9+7 c'est deux fois 8 ; 24+26 c'est deux fois 25 ; etc.), des procédures de minoration et de majoration, des procédures d'estimation par compensation qualitative, etc. permettant d'enrichir et de varier les activités calcul mental.