CONSEIL SUPÉRIEUR
DES PROGRAMMES

Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C 2, C3 et C4

Brigitte Grugeon ,
Professeure d'université, Paris–Est Créteil

Sylvie Coppé,
Maitre de conférences, Université Lyon1

Contribution à propos du numérique et de l'algébrique au cycle 4

Novembre 14

Contribution à propos du numérique et de l'algébrique au cycle 4

Brigitte Grugeon-Allys, Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Est Créteil
Sylvie Coppé, UMR ICAR, Université Lyon1
31 octobre 2014

Principales difficultés dans la mise en œuvre d'un socle commun

L'évaluation, parce que le socle commun n'évalue pas que des savoirs disciplinaires et que son évaluation à caractère formatif, est en rupture avec des pratiques classiques d'enseignement et d'évaluation. Jusqu'à présent, les pratiques d'évaluation formative sont peu développées par rapport aux évaluations sommatives. De plus la notion de compétence n'est pas facile à appréhender et c'est encore un objet de discussion chez les experts.

La définition des items, leur choix, l'équilibre entre le disciplinaire et le non disciplinaire ne sont pas encore stabilisés.

Enfin, on ne sait pas bien comment « rattraper » des élèves qui ne valident pas les compétences du socle. En fait, l'évaluation des élèves par le socle commun devrait être un outil pour les professeurs pour piloter les apprentissages, mais elle est vécue comme une charge de travail supplémentaire.

Principaux résultats de la recherche en didactique des mathématiques sur l'enseignement de l'algèbre

Voici une synthèse rapide des principaux résultats de recherche bien établis en didactique de l'algèbre.

Qu'est-ce que l'algèbre ?

- Un champ des problèmes beaucoup plus vaste que celui de l'arithmétique enseignée en primaire, impliquant différents types de problèmes, qui lui donnent sa puissance et sa raison d'être : des problèmes intra ou extra mathématique de modélisation, des problèmes de mise en équation, des problèmes de généralisation et la preuve (Chevallard 1989, Gascon 1994). Il est donc important que ces types de problèmes soient proposés aux élèves (cela devrait être précisé explicitement dans les programmes)
- La résolution de ces problèmes met en jeu différents objets de l'algèbre (lettres avec différents statuts, expressions algébriques, équations, inéquations, formules, expressions fonctionnelles), avec des propriétés spécifiques, des représentations sémiotiques associées à différents registres. Il y a donc un travail spécifique à faire avec et autour de ces objets, leur introduction doit être pensée.

Identification et la compréhension des difficultés des élèves dans le processus de conceptualisation de l'algèbre

Plusieurs origines des difficultés des élèves :
- la non prise en compte de la double rupture épistémologique entre l'arithmétique de « primaire » et l'algèbre (Vergnaud, 1988, 1989) dans les deux dimensions *outil* et *objet* ;
- la prise en compte insuffisante de la structure des objets de l'algèbre : la signification interne des expressions algébriques s'appuie sur la mise en relation des différents statuts des lettres, la mobilisation des aspects procédural et structural des expressions, le développement d'une flexibilité dans leur interprétation autour des aspects syntaxique et sémantique des expressions et de leur équivalence ;
- la méconnaissance des différentes représentations mathématiques d'un objet dans différents registres de représentation sémiotique ;
- la variation du statut des lettres à travers leur usage dans la résolution de différents types de problèmes, généralisation, modélisation, preuve (Bednarz, Kieran et Lee 1996).

Ceci montre que si un travail important n'est pas fait au collège sur l'algèbre, ces difficultés risquent de perdurer et de rendre difficile le travail à faire ensuite en analyse.

Dans d'autres domaines, il a été montré l'importance de la mise en relation de différents registres de représentation (graphique, numérique, algébrique, ...) : il serait important que les programmes le précisent plus explicitement.

Points positifs et négatifs dans les programmes de 2008 de l'école primaire et du collège

Pour l'école primaire

Trop de savoirs sont introduits au cycle 2 notamment la soustraction et la division même si leur maîtrise n'est pas complètement exigée : il faudrait être plus progressif et attendre le cycle 3 notamment pour la division. Il faut également distinguer ce qui relève du sens des opérations et ce qui relève de la technique. Très souvent cette dernière l'emporte sur le sens et tout le temps d'enseignement peut lui être consacré au détriment du sens.

On pourrait attendre la maîtrise de trois opérations (addition, soustraction et multiplication) en ce qui concerne le sens et une technique. En ce qui concerne le sens de ces opérations, une classification a été donnée dans les travaux de Vergnaud, il serait important de donner des exemples de tels problèmes.

Il faudrait indiquer que la division ainsi que la proportionnalité qui sont liées entre elles et à d'autres notions (fractions, décimaux) sont en cours d'apprentissage et seront vraiment exigées au collège.

Les finalités de la géométrie sont encore floues ce qui a pour conséquence une introduction trop rapide des savoirs plus formels de type collège.

La proportionnalité est un thème que les professeurs des écoles maîtrisent mal souvent pour eux-mêmes. Elle est enseignée de façon très formelle avec une utilisation « forcée » d'objets comme les tableaux et de la procédure automatisée de produit en croix (hors programme mais enseignée) qui accordent peu de place au sens des calculs. Or les problèmes mettant en œuvre la proportionnalité relèvent souvent de la vie quotidienne, leur maîtrise est donc importante pour le futur citoyen au-delà des mathématiques.

La réintroduction dans les programmes de 2008 de la « règle de trois » a donné lieu à de nombreuses confusions chez les professeurs des écoles et chez les auteurs de manuels qui ont interprété cette méthode comme le « produit en croix ». De plus, il a été montré que la règle de trois était une procédure qui engendrait de nombreuses erreurs. On sait également que les élèves utilisent des procédures intuitives qui sont souvent plus rapides et plus claires. Il est donc important de revoir ce point.

Enfin tout le travail qui avait été fait dans les programmes de 2002 sur la résolution de problèmes a été « oublié » dans les programmes de 2008. Il faudrait donc reprendre la classification des problèmes (problèmes d'introduction, de recherche, de réinvestissement, etc.), l'expliciter davantage, donner des exemples de progression incluant les problèmes.

Cycle 4

Numérique et algébrique

Points positifs :
Le programme de 2008 prend compte quelques résultats de la recherche en didactique. La classe de 5^{e} devrait permettre une première rencontre avec les expressions littérales à travers les problèmes de généralisation et de preuve et pas seulement les équations, ce qui n'était pas le cas avant 2005, les équations étant prédominantes. La signification du signe égal comme relation d'équivalence devrait être travaillée en 5^{e}.

Même si l'on note une évolution des genres de tâches (généraliser, prouver, démontrer, modéliser), l'explicitation des finalités de l'algèbre au collège pourrait davantage insister sur le rôle fonctionnel de l'algèbre. Les concepteurs de programme ont voulu rendre l'enseignement de l'algèbre moins formel et moins technique et mettre l'accent sur les types de problèmes qui peuvent être résolus. Cette approche peut favoriser l'étude de l'équivalence des expressions, en introduisant la lettre comme variable avant inconnue (mais de façon peu lisible pour les professeurs) et en articulant les aspects sémantiques et syntaxiques.
On voit bien sur ces questions l'importance de la formation des professeurs.

Points négatifs
Ce qui relève de l'algèbre en termes soit de types de tâches, soit de propriétés (propriété de distributivité par exemple) est disséminé dans les différents secteurs pour une même année et dans les différents niveaux. Par exemple en 5^{e}, « l'algèbre » se trouve dans 3 secteurs : les secteurs 1 (« utiliser/produire des expressions littérales »), 2 (distributivité, équations, etc.) et 4 (référence à l'utilisation des formules). Il y a donc un risque que les types de tâches soient morcelés, que la distributivité n'apparaisse pas comme une des propriétés opérationnelles pour les techniques de calcul, que les professeurs n'arrivent pas à construire des organisations mathématiques cohérentes sur un niveau et sur le cycle 4 et que les élèves n'arrivent pas à voir la puissance de l'outil algébrique à la fois dans son aspect de moyen de résolution de problèmes et dans son aspect technique de calcul.

Il n’y pas beaucoup de lien entre algébrique et numérique, ce qui peut gêner la vérification des calculs et un calcul intelligent et contrôlé.

La dimension sémiotique à travers l’articulation entre différents registres de représentation du domaine algébrique n’est pas suffisamment travaillée.

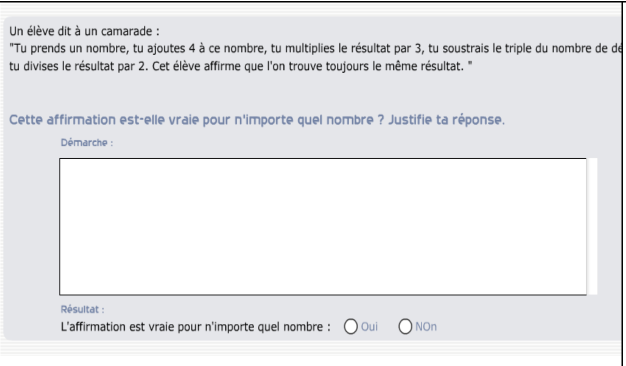
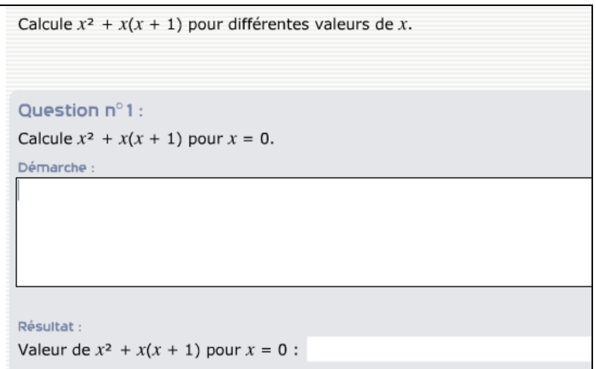
Enfin les exigences sur le socle commun de connaissances et compétences ne nous semblent pas pertinentes : par exemple, les équations ne font pas partie du socle. De même, en 5^{e} « Produire des expressions littérales » ne fait pas partie du socle alors que « Utiliser des expressions littérales » en fait partie.
Dans ces conditions, comment amener les élèves à développer un outil de modélisation et de preuve essentiel pour la résolution de problèmes mathématiques et la compréhension de phénomènes réels ?

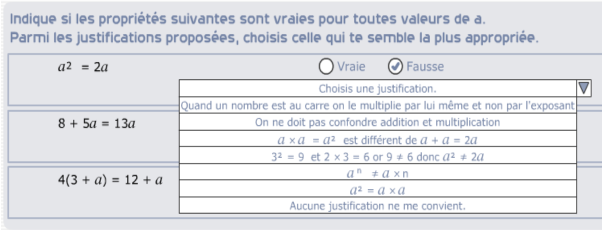
L’apprentissage des nombres relatifs est débuté en classe de 5^{e} et poursuivi en 4^{e}. Il semble que là encore la transition entre les deux classes ne soit pas suffisamment explicite pour les professeurs : les mêmes savoir-faire pouvant être travaillés deux fois ou jamais. Or la non maîtrise du calcul sur les relatifs, la non reconnaissance des structures d’un calcul entraîne de nombreuses difficultés ensuite en algèbre puis en analyse.

Les liens entre l’école primaire et la classe de 6^{e} sont à revoir. En effet, si presque toutes les notions travaillées en 6^{e} ont été abordées à l’école primaire, elles n’ont été vues que sous certaines facettes (ceci est particulièrement vrai pour les fractions, les décimaux, la proportionnalité). Ce qui peut sembler être une reprise pour l’enseignant peut se révéler être une découverte pour les élèves qui ne reconnaissent pas les objets mathématiques car ils sont vus sous une autre facette et utilisés différemment. Il faudrait préciser des limites sur ces sujets dans les programmes de l’école primaire même si la classe de 6^{e} est rattachée au cycle 3.

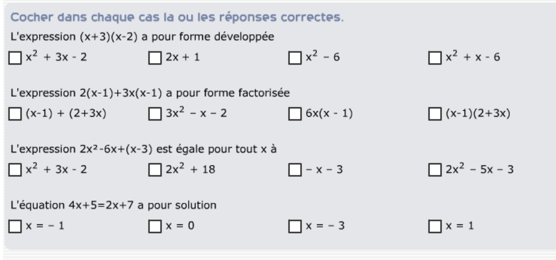
Quelques situations exemplaires d’évaluation sur le calcul littéral

Des situations exemplaires d’évaluation dans le domaine du calcul littéral à l’entrée en 3^{e}.

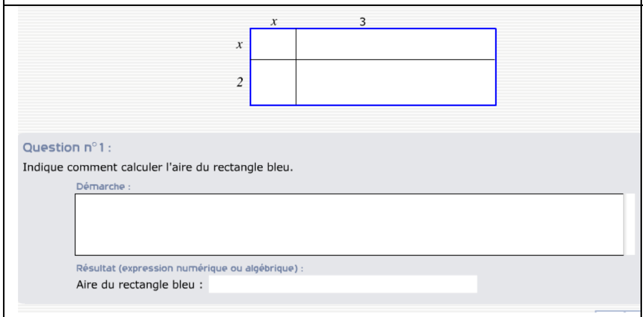
 Un élève dit à un camarade : "Tu prends un nombre, tu ajoutes 4 à ce nombre, tu multiplies le résultat par 3, tu soustrais le triple du nombre de d tu divises le résultat par 2. Cet élève affirme que l'on trouve toujours le même résultat. " Cette affirmation est-elle vraie pour n'importe quel nombre ? Justifie ta réponse. Démarche : Résultat : L'affirmation est vraie pour n'importe quel nombre : Oui NOn	 Calcule $x^2 + x(x+1)$ pour différentes valeurs de x. Question n°1 : Calcule $x^2 + x(x+1)$ pour $x = 0$. Démarche : Résultat : Valeur de $x^2 + x(x+1)$ pour $x = 0$:
Ex6	Ex5



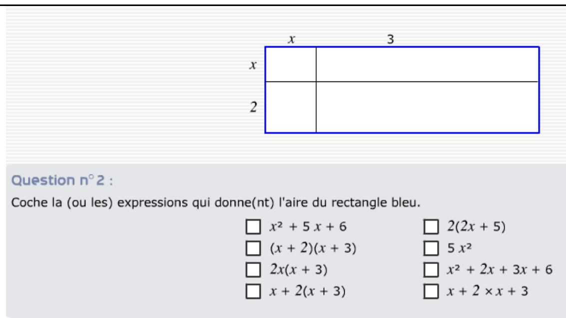
Ex 2



Ex 7



Ex 3.1



Ex 3.2

Dans un domaine donné, une situation à elle seule ne peut donner suffisamment d'informations sur un concept car il ne concerne pas un seul type de situations mais plusieurs. Une situation présente toujours plusieurs concepts interconnectés. Il est donc nécessaire de proposer plusieurs situations pour pouvoir accéder et mettre en relation les connaissances et compétences construites par un élève sur un concept donné.

Les situations proposées permettent de repérer si un élève :
- comprend l'insuffisance du numérique et la nécessité de mobiliser une lettre symbolisant un nombre quelconque pour généraliser et prouver (ex 6, ex 2 justifier Vrai)
- mobilise la dialectique numérique / algébrique et algébrique / numérique (ex 6 (généralisation), ex 2 (contre-exemple), ex 5 (substituer), ex 7 (vérifier calcul))
- interprète la structure d'une expression littérale et ses aspects syntaxique et sémantique, en particulier l'équivalence de deux expressions, pour reconnaître des identités, organiser et contrôler un calcul littéral (ex 2, ex 5, ex 7)
- sait utiliser l'outil algébrique pour modéliser en articulant différents registres de représentation (ex 3).

Gestion en classe pour les situations : illustration pour l'exercice 6

Phase 1 : laisser chercher les élèves 5 à 10 minutes
Le professeur liste les différentes procédures de résolution

- *Stratégies de nature arithmétique* : preuve par l'exemple. Différents types d'écriture possibles : une succession d'égalités qui s'appuie sur une conception incorrecte du signe d'égalité (*écriture pas à pas enchaînée*), soit une suite correcte d'égalités indiquant les différentes étapes du calcul (*écriture pas à pas séparée*), soit une écriture globale pour exprimer le calcul à réaliser, parenthésée ou non, correspondant ou non au calcul (*écriture linéaire globale parenthésée ou non, avec mémoire ou non).*
- *Stratégies de nature algébrique* : preuve algébrique avec les mêmes types d'écriture cités au-dessus.

Phase 2 (5 à 10 minutes) :
Pour les élèves adoptant une stratégie arithmétique, le professeur demande d'écrire le résultat pour un nombre quelconque.
Pour les élèves adoptant une stratégie algébrique avec erreur de traduction, le professeur demande de tester le résultat obtenu avec un nombre

Phase 3 :
Mise en commun des différentes procédures et retour sur les différentes catégories d'erreurs de raisonnement et de calcul.

Phase 4 : institutionnalisation : rôle de l'algèbre pour généraliser et prouver, le passage d'une représentation à une autre, les propriétés utilisées dans un calcul (distributivité et équivalence d'expressions)

Recommandations sur la forme et l'écriture des futurs programmes

L'écriture des programmes doit être lisible pour les enseignants, bien sûr, mais sans en minimiser la complexité. Au-delà de l'énoncé des notions clefs, elle doit montrer une cohérence interne dans chaque domaine et des articulations entre les différents domaines. Une introduction, avant chaque domaine, pourrait expliciter clairement les enjeux mathématiques visés, les problèmes auxquels les notions enseignées peuvent répondre, les connaissances et compétences visées et donner une justification de l'introduction des nouvelles notions en perspective des anciennes.

Recommandations sur des documents ressources avec comme illustration ceux concernant le calcul littéral au cycle 4

Ces documents doivent permettre de transposer aussi simplement que possible des résultats de recherche en didactique (meilleure connaissance des notions à enseigner à tel niveau, difficultés des élèves, erreurs classiques, etc) et surtout comment les mettre en œuvre dans des progressions et des séquences d'enseignement. C'est ce qui a été tenté dans la brochure « Du numérique au littéral » en 2006 (différents statuts de la lettre ou du signe égal, place des formules, distinction entre résolutions arithmétiques et algébriques, différents aspects structural et procédural d'une expression), mais sans informations sur leur mise en œuvre, et avec des formulations certainement trop complexes.

Les documents d'accompagnement ont jusque-là proposé des problèmes clefs pour introduire des notions nouvelles (trois issus de Combier et al. (1996), quatre dans le document « Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée », (MEN 2013)). Mais ces problèmes étaient présentés de façon isolée, sans vraiment expliciter leur inscription dans une progression, ni dans une séquence complète. De plus, les enseignants n'avaient pas à disposition de scénario de mise en œuvre possible (excepté quelques éléments dans les deux derniers). Ce qui expliquer leur faible utilisation et leur faible impact sur l'évolution des pratiques des enseignants.
Pour permettre aux enseignants d'investir les documents d'accompagnement il est indispensable de mettre à disposition des ressources qui fournissent des liens opérationnels entre connaissances et situations de classe, des éléments sur les évolutions de la transposition didactique qui pourraient expliquer, éclairer les changements. Lorsque des exemples de problèmes sont proposés, il est nécessaire de préciser leur statut dans une typologie

préalablement définie, de justifier leur rôle dans les étapes de la progression, en particulier dans l'introduction d'une nouvelle notion et par rapport aux éléments de savoirs qui sont institutionnalisés, et de fournir des éléments de mise en œuvre mais aussi des difficultés possibles dans la gestion avec des alternatives.

Enfin, parallèlement il faut développer la formation continue dans laquelle on pourrait utiliser ces documents.